# صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الترموديناميكية المستوية للإجهادات جسم هوك Hooke

د. وعد سمير عطية *

waed.atteiah@wpu.edu.sy

**ملخص البحث:**

موضوع البحث هو الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم الصلب المتماثل المناحي (Isotropic) والمتجانس (Homogeneous)، ومهمل البنية الجزيئية وخاضع لانفعالات مرنة صغيرة، ضمن المرونة الخطية الترموديناميكية المترابطة مع الحرارة، والذي وضع أساسه الباحث هوك و يُرمز له اختصاراً بـ (H). في البحث، سنعرض أولاً طريقة القوى المتكاملة (IFM)، في استنتاج صياغة بيلترامي – ميشيل المكتملة (CBMF) الحاكمة للحالة السكونية المستوية الأولى بإجهادات للجسم هوك [4-1].

سنناقش في البحث ، صياغة بيلترامي– ميشيل المعممة المكتملة (CGBMF) للحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم هوك بطريقة القوى الترموديناميكية المعممة المتكاملة (GTDIFM)، وفي النهاية سننهي البحث بإقتراح عدد من المسائل المفتوحة.

* دكتورة في الرياضيات التطبيقية ، عضو هيئة تدريسية في الجامعة الوطنية الخاصة.

**الكلمات المفتاحية**: الحالة الترموديناميكية المستوية للجسم (H). صياغة Beltrami-Michell الترموديناميكية المعممة المكتملة للحالة الترموديناميكية المستوية للإجهادات المرنة للجسم (H).

# The Completed Generalized Beltrami-Michell Formulation (CGBMF) for the Thermodynamical Stress Plane State of the Hooke Body

**Dr.Waad Samir Attiah** †    waed.atteiah@wpu.edu.sy


## Abstruct

The subject of the paper is the thermodynamical stress plane state of small strains for the thermoelastic, homogeneous and isotropic body, with neglected structure, and subjected to temperature field, proposed by Hooke, and shortly called (H). First, we introduce the integrated force method (IFM) [1−4] for deriving the completed Beltrami−Michell formulation (CBMF) for the static first stress plane state of small strains of the (H) body. In paper, first using the variational functional of the generalized thermodynamical integrated force method (GTDIFM),we discuss the following: I) The completed generalized Beltrami−Michell Formulation (CGBMF) for the thermo−dynamical stress plane state of small strains for (H) body. Finally, we end the paper, by proposing new open problems for future works.


† Applied Math. Doctor, Lecturer at AL Wataniya Private University.

**Key words**: The Thermodynamical Stress Plane State -The Completed Generalized Beltrami-Michell Formulation (CGBMF) for the Thermodynamical Stress Plane State of (H) with small Elastic Strains.

## 1. مقدمة:

بدأ ظهور علم مقاومة المواد عام 1632 مع تجربة غاليلو التي لاحظ فيها غاليلو أن مقاومة العارضة تتناسب بصورة غير خطية مع مساحة مقطعها [3] ، وبعد حوالي قرن تابع كولومب مسيرة غاليلو في نظرية العوارض.

على الرغم من أن بعض حسابات غاليلو لم تتطور بشكل كامل، إلا أن العبقرية ظهرت منذ تاريخ ولادة نيوتن في نفس السنة التي توفي فيها غاليلو، وعندها لم تكن معروفة قوانين التوازن أو الحساب التحليلي.

ومع نشوء الثورة الصناعية وانتصارات الحروب ، كانت الحاجة ملحة لتسريع تطور علم مقاومة المواد لحاجته في التصميم. بعد ذلك ظهرت عدة كتب حول هذا الموضوع بدءاً من كتاب Timoshenko عام 1930 الذي أعطى معالجة شاملة لنظرية مقاومة المواد، تلا ذلك كتب: Popov، Hibbeler، Gere & Timoshenko، Beer & Johnston، وHigdon Etal، ... الخ.

وبالعودة إلى عصر نيوتن فقد وضع الباحث هوك (معاصر نيوتن) العلاقة التالية، التي شكلت فيما بعد مفهوماً أساسياً في علم المرونة (Elasticity): $\boldsymbol{\sigma = \kappa\, \varepsilon}$. ومن ثم في عام 1822، أوجد كوشي ما يسمى بالصياغة الإجهادية المؤلفة من معادلات التوازن (EE) Equilibrium Equations والشروط الحدية Boundary Conditions (BC).إن المسألة السابقة عبارة عن ثلاثة معادلات مع ثلاثة شروط حدية، وللمسألة ستة مجاهيل هي الإجهادات المتناظرة $\tau_{i\,j}$، وبالتالي تكون هذه الصيغة، ناقصة. وفي عام 1860 أوجد ساينت – فينانت (Saint – Venant)، صيغة الانفعالات، المؤلفة فقط من معادلات توافق الانفعالات (CC) Compatibility Conditions، ولم يوجد الشروط الحدية للانفعالات، الأمر الذي يًبقى المسألة المؤلفة من: صياغة الانفعالات مضافاً لها صياغة الإجهادات أي المسألة المكونة من معادلات التوازن و معادلات توافق الانفعالات و الشروط الحدية مسألة ناقصة، كونها مسألة مؤلفة من ست معادلات بستة مجاهيل، مضافاً إليها ثلاثة شروط حدية، وهي لا تملك حل وحيد، يتوافق مع سلوك الجسم.

بقي هذا النقص على وضعه هذا حوالي قرن ونصف، حتى بداية القرن الحادي والعشرين.

وفي بداية القرن الحادي والعشرين، وتحديداً في عام 2004، فاجأ الباحثان:

باتنيك ، هوبكينز العاملان ضمن فريق في وكالة ناسا الفضائية العالمية بإيجادهما للشروط الحدية لتوافق الانفعالات:

Boundary Compatibility Conditions (BCC)

فأثبتوا أن المسألة السابقة، مضافاً لها الشروط الحدية لتوافق الانفعالات هي مسألة تامة، سمياها مسألة الإتمام لصياغة بلترامي ميشيل:

Completed Beltrami – Michell Formulation

أي أنها تعبر عن مجموع ما يلي :

الشروط الحدية لتوافق الانفعا3لات مضافاً لها شروط التوازن ، و معادلات توافق الانفعالات ،و الشروط الحدية

كل ذلك لأجل الحالة السكونية المستوية الأولى، والحالة السكونية الفراغية للانفعالات المرنة للجسم هوك.

أما الطريقة التي اتبعها الباحثان في إيجاد الشروط الحدية لتوافق الانفعالات وكذلك معادلات توافق الانفعالات ومعادلات التوازن والشروط الحدية فتنتج من شرط انتظام التغاير الدالي في طريقة القوى المتكاملة:

Stationary Condition for the Variational Functional of the Integrated Force Method (IFM)

ولنعد إلى الفترة التي لم تكن فيها الشروط الحدية لتوافق الانفعالات مكتشفة، وتحديداً العام 1963. ففي هذا العام استنتج الباحث اغناتشاك تعميم معادلات بيلترامي ميشيل من الحالة السكونية إلى الحالة التحريكية للجسم هوك، سالكاً طريقاً يختلف عن الطريق التقليدي المسلوك في إيجاد هذه المعادلات، حيث الطريق التقليدي المذكور يعتمد على صيغة سانت فينانت ، فحصل الباحث المذكور على معادلات دعاها بمعادلات بيلترامي – ميشيل المعممة:

Generalized Beltrami – Michell Equations (GBME)

وبيَّن الباحث المذكور أن المعادلات هذه هي ست معادلات بستة مجاهيل هي المركبات الست $\sigma_{ij}$ للإجهادات، وإذا أضفنا إلى هذه المعادلات الشروط الحدية، والشروط الابتدائية: $\sigma_{ij}=\sigma^{\mathbf{0}}_{ij},\dot{\sigma}_{ij}=\dot{\sigma}^{\mathbf{0}}_{ij}$ ، (المعطاة بشكل معين)، فحل المسألة الناتجة لا يتوافق مع معادلات تحريك هذا الجسم ضمن المرونة الخطية التحريكية. كما أن المعادلات السابقة تحتوي على التناقض التالي: عدد هذه المعادلات هو ست معادلات بستة مجاهيل مستقلة، وعند الانتقال من حالة التحريك إلى حالة التوازن (بأخذ المشتقات الزمنية الثانية مساوية للصفر)، فنحصل على معادلات بلترامي ميشيل، التي هي ثلاث معادلات بستة مجاهيل هي $\sigma_{ij}$.

وفي عام 2020 طورت الباحثة وعد عطية عملي باتنيك و هوبكينز و جوزيف اغناتشاك وذلك بمناقشة صياغة بيلترامي – ميشيل الترموديناميكية المعممة، المكتملة لأجل الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة. الطريقة المستخدمة هي تعميم طريقة القوى المتكاملة إلى طريقة القوى الترموديناميكية المتكاملة [8].

## 2. هدف البحث:

إن السلوك الترموديناميكي المستوي والسلوك الديناميكي المستوي العكسي للجسم هوك لا ينتجان عن السلوك الترموديناميكي الفراغي لهذا الجسم، الأمر الذي يجبرنا على دراسة هذين السلوكيين المذكورين انطلاقاً من أساسياتهما. يهدف البحث إلى استنتاج صياغة بيلترامي – ميشيل الترموديناميكية المعممة المكتملة للحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك.

## 3. طرق البحث:

من أجل هذا الهدف سنعتمد تعميم طريقة القوى المتكاملة [1–4]، إلى طريقة القوى الترموديناميكية المتكاملة مكتوبة لأجل الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم هوك من أجل متطلبات البحث، تلزمنا التوطئة التالية.

توطئة1: نعتمد الجملة الإحداثية الديكارتية القائمة ، والمباشرة، والعطالية $Oxyz$، والتي قاعدتها $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$. لأجل الحالات المستوية لإجهادات الجسم المدروس، تكون

جميع المقاطع التنسورية الحاكمة للحالة الترموديناميكية للجسم المعتبر، تكون مستقلة عن الاحداثي الديكارتي الثالث $z$، وهنا نميز حالتين؛

**أولاً:** الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك: وفيها نرمز للحالة البدئية للجسم بـ $\Omega$، التي نفرض أنها منطقة بسيطة الترابط في $R^2$ وبسماكة قدرها $h$.

توصف العملية الترموديناميكية للجسم المعتبر بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية المجهولة: $(\mathbf{u}\,,\theta,\boldsymbol{\sigma}\,,\boldsymbol{\varepsilon})$، حيث: $\mathbf{u}$ مقطع الإزاحات المتجهي، و $\theta:=\mathrm{T}-\mathrm{T}_0$ حقل سلمي؛ يمثل تغير حقل الحرارة ؛ حيث $\mathrm{T}$ الحرارة المطلقة في الجسم و $\mathrm{T}_0$ حرارة الحالة الطبيعية له. إضافةً إلى ماتقدم ذكره فإن: $\boldsymbol{\sigma}\,,\boldsymbol{\varepsilon}$ مقطعان تنسوريان متناظران من المرتبة الثانية ، على الترتيب هما: مقطع الإجهادات، ومقطع الانفعالات، وإذا رمزنا بـ $]\,0\,,\infty\,[\;=:\mathrm{T}^+$، و بـ $[\,0\,,\infty\,[\;=:\mathrm{T}$، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega\times\mathrm{T}^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي $[\mathbf{O},(\mathbf{i}\,,\mathbf{j}\,,\mathbf{k})]$، بالشكل:

$$\mathbf{u}\equiv(u\,,\mathrm{v}\,,0)\,,\;\boldsymbol{\varepsilon}\equiv\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0\\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix},\;\boldsymbol{\sigma}\equiv\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad(3.1)$$

حيث:

$$\varepsilon_z=-\frac{1}{\lambda+2\mu}\left[\lambda\,(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+m\,\theta\right]\quad(3.2)$$

حيث: $m=-(3\lambda+2\mu)\,a_t$، و $a_t$ يمثل معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، و $\mu\,,\lambda\in R_+$ تمثل ثوابت لامي المادية للجسم المدروس. أما مقطع القوة الحجمية $\mathbf{B}$ الذي هو مقطع متجهي، معطى، فيمكن أن يمثل في $\Omega\times\mathrm{T}^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعتبر، بالشكل:

$$\mathbf{B}\equiv(B_x\,,B_y\,,0)\quad(3.3)$$

أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x}\equiv(x\,,y)\in\Omega$ وللزمن $t$.

***ثانياً:*** *الحالة الديناميكية المستوية العكسية لإجهادات الجسم هوك* في هذه الحالة توصف العملية الديناميكية للجسم المعتبر بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية

المجهولة: $(\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\sigma}\,,\boldsymbol{\varepsilon})$، حيث: $\mathbf{u}$ مقطع الإزاحات المتجهي، كما أن: $\boldsymbol{\sigma}\,,\boldsymbol{\varepsilon}$ مقطعان تنسوريان متناظران من المرتبة الثانية ، على الترتيب هما مقطع الإجهادات، ومقطع الانفعالات. يمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega\times \mathrm{T}^{+}$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعتبر، بالشكل:

$$\mathbf{u}\equiv(0\,,0\,,w\,)\,,\ \boldsymbol{\varepsilon}\equiv\begin{bmatrix}0 & 0 & \gamma_{xz}\\ 0 & 0 & \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}\equiv\begin{bmatrix}0 & 0 & \tau_{xz}\\ 0 & 0 & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0\end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

أما مقطع القوة الحجمية $\mathbf{B}$ الذي هو مقطع متجهي، معطى، فيمكن في هذه الحالة أن يمثل في $\Omega\times \mathrm{T}^{+}$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعتبر، بالشكل:

$$\mathbf{B}\equiv(0\,,0\,,B_z\,) \qquad (3.3)$$

أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x}\equiv(x\,,y\,)\in\Omega$ وللزمن $t$. في البحث سنركز اهتمامنا فقط على الحالة الأولى، مؤجلين الحالة الثانية الحالة الديناميكية المستوية العكسية للجسم هوك لأبحاث قادمة.

نعرض فيما يلي نتائج البحث [1−4] المتمثلة بطريقة ثبات دالي لطريقة القوى المتكاملة في استنتاج صياغة بيلترامي – ميشيل المكتملة الحاكمة للحالة السكونية المستوية الأولى بإجهادات للجسم هوك لأجل الحالة السكونية المتساوية درجات الحرارة، المستوية الأولى للإجهادات المرنة للجسم هوك في هذه الحالة تتعين الحالة السكونية المرنة للجسم المعتبر بواسطة المقاطع التنسورية المجهولة $(\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\sigma}\,,\boldsymbol{\varepsilon})$ $(\theta=0)$ ، التي تأخذ في $\Omega$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعتبر الشكل $(3.1)$ و$(3.2)$، أما مقطع القوة الحجمية المعطى: $\mathbf{B}$ فيمثل في $\Omega$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعتبر، بالشكل $(3.3)$.

يأخذ دالي (IFM) للجسم السكوني المرن هوك الذي يشغل المنطقة بسيطة الترابط $\Omega\subset R^2$، المحاطة بالمنحني المغلق $\pounds=\pounds_1\cup\pounds_2$ ( $\pounds_1\cap\pounds_2=\varnothing$ )، والذي سماكته $h$ ، يأخذ الشكل التالي:

$$\Pi_S=A+B-W \qquad (3.4)$$

حيث $A$ الطاقة الداخلية للجسم التي تعطى من خلال مقطع الإجهاد $\boldsymbol{\sigma}$ ومقطع الإزاحة $\mathbf{u}$، بالعلاقة:

$$A(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = h\int_{\Omega}\left[\sigma_x\,\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\,\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy \qquad (3.5)$$

كما أن $B$ تمثل الطاقة الداخلية المتممة في الجسم، والتي تعطى بدلالة مقطع الانفعال $\boldsymbol{\varepsilon}$ ومقطع الإجهاد الزائد $\boldsymbol{\sigma}^e$ [3] ، من خلال العلاقة:

$$B(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}^e) = h\int_{\Omega}\left(\varepsilon_x\,\sigma_x^e+\varepsilon_y\,\sigma_y^e+2\gamma_{xy}\,\tau_{xy}^e\right)dx\,dy \qquad (3.6)$$

أخيراً، الحد: $W(\mathbf{P},\mathbf{u})$ يمثل كمون القوى الخارجية للجسم، وهو يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{P},\mathbf{u}) &= h\int_{\Omega}\left(B_x u+B_y v\right)dx\,dy\,+\\ &+\int_{\pounds_1}\left(\bar{P}_x u+\bar{P}_y v\right)d\ell_1+\int_{\pounds_2}\left(P_x\bar{u}+P_y\bar{v}\right)d\ell_2, \end{aligned} \qquad (3.7)$$

ويملك ثلاث مركبات؛ الأولى تتمثل بالتكامل السطحي: $h\int_{\Omega}\left(B_x u+B_y v\right)dx\,dy$ ، المتوافق مع القوى الحجمية: $B_x$ و $B_y$ المفروضة (المعلومة) في $\Omega$، الثانية؛ تتمثل بالتكامل المنحني: $\int_{\pounds_1}\left(\bar{P}_x u+\bar{P}_y v\right)d\ell_1$ ، على جزء المنحني: $\pounds_1$، حيث معطى على هذا الجزء، الحمول الخارجية: $\bar{P}_x$ و $\bar{P}_y$، أما الثالثة (الأخيرة)؛ فهي تتمثل بالتكامل المنحني: $\int_{\pounds_2}\left(P_x\bar{u}+P_y\bar{v}\right)d\ell_2$ ، على جزء المنحني: $\pounds_2$، حيث معطى على هذا الجزء، الإزاحات: $\bar{u}$ و $\bar{v}$.

إذا أخذنا بعين الاعتبار العلاقات الهندسية التالية المحققة في $\Omega$:

$$\begin{aligned} &E\,\varepsilon_x = \sigma_x-\nu\,\sigma_y\ ,\ E\,\varepsilon_y = \sigma_y-\nu\,\sigma_x\ ,\\ &E\,\gamma_{xy} = (1+\nu)\,\tau_{xy} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

حيث: $\upsilon = \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ تمثل نسبة بواسون، و $E = \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ يمثل معامل يونغ،

فتأخذ الطاقة الداخلية المتممة في الجسم الشكل التالي:

$$B(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^e)=h\int_{\Omega}\left[\frac{\left(\sigma_x-\nu\,\sigma_y\right)}{E}\sigma_x^e+\frac{\left(\sigma_y-\nu\,\sigma_x\right)}{E}\sigma_y^e+\right.$$
$$\left.+2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\,\tau_{xy}^e\right]dx\,dy \tag{3.9}$$

مما سبق نجد أن $\Pi_S=\Pi_S(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}^e)$، لكن بهدف حساب تغاير هذا الدالي، علينا لاحقاً اعتبار أنه تابع لمقطع الإزاحة: $\mathbf{u}$ ولمقطع الإجهاد الزائد: $\boldsymbol{\sigma}^e$.

صياغة بيلترامي – ميشيل المكتملة *ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات:*

في هذه الحالة فإن دالي التغاير فإن دالي التغاير الذي سنرمز له هنا بالرمز $\Pi_S^{\mathrm{BMF}}$ سيتبع للإزاحات: $u$ , v ولمقطع الإجهاد الزائد $\boldsymbol{\sigma}^e$، المعطى بدوره في $\Omega$ من خلال دالة إجهاد Airy على النحو التالي:

$$\sigma_x^e=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-V\ ,\ \sigma_y^e=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-V\ ,\quad \tau_{xy}^e=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} \tag{3.10}$$

حيث $V$ كمون القوى الحجمية $B_x\ ,\ B_y$؛

$$B_x=\frac{\partial V}{\partial x},\ B_y=\frac{\partial V}{\partial y} \tag{3.11}$$

بتعويض (3.10) في (3.9) نحصل على:

$$B(\boldsymbol{\sigma},\Phi)=h\int_{\Omega}\left[\frac{\left(\sigma_x-\nu\,\sigma_y\right)}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-V\right)+\frac{\left(\sigma_y-\nu\,\sigma_x\right)}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-V\right)\right.$$
$$\left.-2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right]dx\,dy \tag{3.12}$$

ينتج عن (3.4) و (3.5) و(3.12) و (3.7) أن دالي التغاير: $\Pi_S^{\mathrm{BMF}}$ يأخذ الشكل:

$$\begin{aligned}\Pi_S^{\mathrm{BMF}} &= h\int_{\Omega}\left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\ + \\ & h\int_{\Omega}\left[\frac{\left(\sigma_x-\nu\,\sigma_y\right)}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-V\right)+\frac{\left(\sigma_y-\nu\,\sigma_x\right)}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-V\right)\right. \\ & \left.-2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right]dx\,dy-h\int_{\Omega}\left(B_x u+B_y v\right)dx\,dy \\ & -\int_{\pounds_1}\left(\bar{P}_x u+\bar{P}_y v\right)d\ell_1-\int_{\pounds_2}\left(P_x\bar{u}+P_y\bar{v}\right)d\ell_2,\end{aligned} \tag{3.13}$$

إن شرط انتظام دالي التغاير: $\Pi_S^{\mathrm{BMF}}$، بعد سلسلة من العمليات الجبرية، مروراً باستخدام بمبرهنة غرين، يأخذ الشكل التالي [3]:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_S^{\mathrm{BMF}} &= h\left\{\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+B_x\right)\delta u\ +\right.\right. \\ & \left.+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+B_y\right)\delta v\right]d\Omega+\frac{1}{E}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y-\nu\,\sigma_x\right)+\right. \\ & \left.\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x-\nu\,\sigma_y\right)-2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\,\partial y}\right]\delta\Phi\,d\Omega\right\} \\ & -h\left\{\int_{\pounds_1}\left[\left(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y-\bar{P}_x\right)\delta u+\left(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y-\bar{P}_y\right)\delta v\right]d\ell_1\right. \\ & +\int_{\pounds_2}\left[(u-\bar{u})\delta\left(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y\right)+(v-\bar{v})\delta\left(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y\right)\right]d\ell_2 \\ & +\frac{1}{E}\int_{\pounds}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_y-\nu\,\sigma_x\right)n_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_x-\nu\,\sigma_y\right)n_y\right. \\ & \left.\left.-(1+\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}n_y+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}n_x\right)\right]\delta\Phi\,d\ell\right\}=0,\end{aligned} \tag{3.14}$$

حيث: $d\,\Omega = d\,x\,d\,y$، و $\mathbf{n} \equiv (n_x\,,n_y\,)$ متجه واحدة ناظم المنحني المغلق £، المحيط بالجسم، في النقطة المادية اللاغرانجية $p \equiv (x\,,y\,)$ منه ، حيث $\mathbf{n}$ موجه نحو خارج هذا المنحني £. ينتج عن العلاقة (3.14) مايلي:

أولاً : معادلات الحقل المحققة في $\Omega$ : وهي مؤلفة:

أ- معادلات التوازن Equilibrium Equations ,)، المحققة ضمن $\Omega$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء السطحي للتكامل (3.14) يجب أنه تنعدم أمثال التغيرات ( $\delta u$ , $\delta v$ )، حيث نحصل على معادلتي التوازن التاليتين المحققتين في $\Omega$:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{x\,y}}{\partial y} + B_x = 0\ ,\quad \frac{\partial \tau_{x\,y}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = 0\ , \qquad (3.15)$$

ب-معادلة توافق الانفعالات Compatibility Conditions المعبر عنها بلغة الإجهادات، والمحققة ضمن $\Omega$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء السطحي للتكامل (3.14) يجب أنه تنعدم أمثال تغير دالة الإجهاد: $\delta\Phi$، حيث نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) - 2\,(1+\nu)\,\frac{\partial^2\,\tau_{x\,y}}{\partial x\,\partial y} = 0\ , \quad (3.16)$$

إن معادلة توافق الانفعالات السابقة، تأخذ باستخدام معادلات التوازن، الشكل المكافئ التالي في $\Omega$ [3]:

$$\Delta_1\left[\sigma_x + \sigma_y + (1+\nu)\,V\right] = 0\ , \qquad (3.17)$$

أو الشكل:

$$\Delta_1\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + (1+\nu)\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right) = 0\ , \qquad (3.18)$$

حيث $\Delta_1$ مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي في $R^2$؛ $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$،

ثانياً: الشروط الحدية المحققة على £: وهي مؤلفة:

ج – شروط الجر الحدية المحققة على $\pounds_1$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء المنحني للتكامل (3.14) على جزء المنحني $\pounds_1$، يجب أن تنعدم أمثال التغيرات $(\delta u, \delta v)$، فنحصل على الشروط الحدية التالية المحققة على $\pounds_1$:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \bar{P}_x \quad , \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \bar{P}_y \ , \qquad (3.19)$$

د- شروط توافق الانفعالات الحدية Boundary Compatibility Conditions)، المحققة على كامل المنحني $\pounds$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء المنحني للتكامل (3.14) على كامل المنحني $\pounds$، يجب أن تنعدم أمثال التغير $\delta\Phi$، فنحصل على الشرط الحدي التالي المحقق على $\pounds$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_y - \nu \sigma_x\right) n_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_x - \nu \sigma_y\right) n_y \\ &- (1+\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} n_y + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} n_x\right) = 0 \end{aligned} \qquad (3.20)$$

إن شروط الجر الحدية (3.19) هي شروط مألوفة في مسألة الحالة السكونية المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب، بينما الشرط (3.20) هو الشرط الجديد المسمى بشرط توافق الانفعالات، الحدي على $\pounds$.

هـ– شروط الاستمرار، الحدية Continuously boundary Conditions المحققة على $\pounds_2$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء المنحني للتكامل (3.14) على جزء المنحني $\pounds_2$، يجب أن تنعدم أمثال التغيرات $\delta\left(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y\right)$ و $\delta\left(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y\right)$، فنحصل على الشروط الحدية التالية المحققة على $\pounds_2$:

$$u = \bar{u} \ , \ v = \bar{v} \ , \qquad (3.21)$$

تمثل المعادلات والشروط (3.14)–(3.20) ، صياغة بلترامي ميشيل المكتملة لأجل الحالة السكونية المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب [3].

### 4. النتائج والمناقشة:

فيما يلي سنناقش الصياغة المكتملة لمعادلات بلترامي ميشيل المعممة، من الحالة السكونية المستوية الأولى (First Plane Static Case) إلى الحالة التحريكية الحرارية المستوية (Plane Thermodynamical Case) لإجهادات الجسم الصلب المدروس هوك. الطريقة المعتمدة هي تعميم الطريقة المستخدمة في[1]، انطلاقاً من التغيير الافتراضي لدالي طريقة القوة الديناميكية الحرارية المتكاملة ( Integrated Thermodynamically Force Method)، حيث الدالي الذي سنرمز له هنا بالرمز $\Pi_{TDS}$ هو تعميم للدالي $\Pi_S$ الموجود في [1−4] ، من الحالة السكونية المستوية الأولى للجسم (H) إلى الحالة الترموديناميكية المستوية له. ويكمن هذا التعميم بإضافة طاقة العطالة إلى الدالي $\Pi_S$ضمن عبارة هذا الدالي في [1−4]،على النحو التالي:

يملك الدالي $\Pi_{TDS}$ في حالتنا هذه أربعة حدود بالشكل:

$$\Pi_S = A + B + C - W \tag{4.1}$$

حيث $A$ الطاقة الداخلية للجسم التي تعطى من خلال مقطع الإجهاد $\boldsymbol{\sigma}$ ومقطع الإزاحة $\mathbf{u}$، بالشكل:

$$A(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = h\int_{\Omega}\left[\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy \tag{4.2}$$

و $B$ تمثل الطاقة الداخلية المتممة في الجسم، والتي تعطى بدلالة مقطع الانفعال $\boldsymbol{\varepsilon}$ ومقطع الإجهاد الزائد $\boldsymbol{\sigma}^e$ ، من بواسطة العلاقة:

$$B(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}^e) = h\int_{\Omega}\left(\varepsilon_x\sigma_x^e+\varepsilon_y\sigma_y^e+2\gamma_{xy}\tau_{xy}^e\right)dx\,dy \tag{4.3}$$

والحد $C$ يمثل طاقة العطالة للجسم الصلب (H)، معبر عنها بدلالة مقطع الإزاحة $\mathbf{u}$، على النحو الآتي:

$$C(\mathbf{u}) = h\int_{\Omega}\rho\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)dx\,dy \tag{4.4}$$

أخيراً، الحد: $W(\mathbf{P},\mathbf{u})$ يمثل كمون القوى الخارجية للجسم، ويعطى بالعلاقة:

$$W(\mathbf{P}, \mathbf{u}) = h \int_{\Omega} \left( B_x u + B_y v \right) dx\, dy + \\ + \int_{\pounds_1} \left( \bar{P}_x u + \bar{P}_y v \right) d\ell_1 + \int_{\pounds_2} \left( P_x \bar{u} + P_y \bar{v} \right) d\ell_2, \tag{4.5}$$

وهو يملك ثلاث مركبات؛ الأولى هي التكامل السطحي: $h \int_{\Omega} \left( B_x u + B_y v \right) dx\, dy$ ، المتوافق مع القوى الحجمية: $B_x$ و $B_y$ المفروضة (المعلومة) في $\Omega$، والثانية؛ هي التكامل المنحني: $\int_{\pounds_1} \left( \bar{P}_x u + \bar{P}_y v \right) d\ell_1$ ، على جزء المنحني: $\pounds_1$، حيث يعطى على هذا الجزء، الحمول الخارجية: $\bar{P}_x$ و $\bar{P}_y$، أما الثالثة (الأخيرة)؛ فهي التكامل المنحني: $\int_{\pounds_2} \left( P_x \bar{u} + P_y \bar{v} \right) d\ell_2$ ، على جزء المنحني: $\pounds_2$، حيث يعطى على هذا الجزء، الإزاحات: $\bar{u}$ و $\bar{v}$.

لنأخذ، بعين الاعتبار العلاقات التأسيسية العكسية التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} E\,\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu\,\sigma_y + (2\nu - 1)\, m\, \theta, \\ E\,\varepsilon_y &= \sigma_y - \nu\,\sigma_x + (2\nu - 1)\, m\, \theta, \\ E\,\gamma_{xy} &= (1+\nu)\,\tau_{xy} \end{aligned} \tag{4.6}$$

حيث الحرارة $\theta$، وفقاً لنظرية التوصيل الحراري [7]، تحقق معادلة التوصيل الحراري التالية في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\widehat{\mathrm{D}}\theta + \frac{2\mu\, m\, T_0}{k\,(\lambda + 2\mu)} \left( \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y \right) = -\frac{r}{k}, \tag{4.7}$$

حيث النقطة تدل على المشتق الجزئي الزمني؛ $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$, والمؤثر الاشتقاقي:

$$\widehat{\mathrm{D}} := \Delta_1 - \frac{1}{k} \left( c + \frac{m^2 T_0}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.8}$$

حيث: $k$ التوصيل الحراري، و $m$ المعامل الإجهادي–الحراري، $c$ الحرارة النوعية للجسم المدروس، وجميعها مقادير حقيقية ثابتة. كما أن: $r$ هو تابع معطى، للموضع والزمن؛

مضافاً إلى ذلك، الشروط الحدية والابتدائية التالية، المتعلقة بالحقل الحراري $\theta$:

– الشرط الحدي على $\pounds \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\theta = \vartheta \ \text{ on } \ \pounds^{\theta} \times \mathrm{T}, \\ &\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \mathrm{q} \ \text{ on } \ \pounds^{\mathrm{q}} \times \mathrm{T}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

حيث التابع الحقيقي: $\vartheta$ معطى على $\pounds^{\theta} \times \mathrm{T}$، والتابع الحقيقي $\mathrm{q}$ نعطى على $\pounds^{\mathrm{q}} \times \mathrm{T}$،

أخيراً: $\pounds = \pounds^{\theta} + \pounds^{\mathrm{q}} \quad (\pounds^{\theta} \cap \pounds^{\mathrm{q}} = \varnothing)$ ،

و: $\dfrac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} := \mathbf{n}\,.\,\mathbf{grad}\,\theta = n_x\,\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + n_y\,\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$.

– الشرط الابتدائي في $\Omega \times \{0\}$:

$$\theta = \theta^{0}, \tag{4.10}$$

( حيث التابع الحقيقي: $\theta^{0}$، معطى في $\Omega$).

إذا عوضنا الآن، (4.6) في (4.3)،

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^{e}, \theta) = h \int_{\Omega} \Bigg[ &\frac{(\sigma_x - \nu\,\sigma_y)}{E}\sigma_x^{e} + \frac{(\sigma_y - \nu\,\sigma_x)}{E}\sigma_y^{e} + \\ &+ \frac{(2\nu - 1)\,m\,\theta}{E}(\sigma_x^{e} + \sigma_y^{e}) + 2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\,\tau_{xy}^{e} \Bigg] dx\,dy \end{aligned} \tag{4.11}$$

مما سبق نجد أن $\Pi_S = \Pi_S(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \theta, \boldsymbol{\sigma}^{e})$، لكن بهدف حساب تغاير هذا الدالي، علينا لاحقاً اعتبار أنه تابع لمقطع الإزاحة: $\mathbf{u}$ ولمقطع الإجهاد الزائد: $\boldsymbol{\sigma}^{e}$.

صياغة بيلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم المعتبر هوك:

في هذه الحالة أيضاً، سنعتبر أن دالي التغاير الذي سنرمز له هنا أيضاً بالرمز $\Pi_S^{BMF}$، تابع للإزاحات: $u$ , v ولمقطع الإجهاد الزائد $\boldsymbol{\sigma}^e$ [1]، المعطى بدوره في $\Omega$ من خلال دالة إجهاد Airy على النحو التالي:

$$\sigma_x^e = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \;\; , \;\; \sigma_y^e = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \;\; , \quad \tau_{xy}^e = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} \qquad (4.12)$$

حيث $V$ كمون القوى الحجمية $B_x$ , $B_y$؛

$$B_x = \frac{\partial V}{\partial x} , \; B_y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad (4.13)$$

بتعويض (4.12) في (4.11) نحصل على:

$$B(\boldsymbol{\sigma}, \Phi, \theta) =$$

$$= h \int_\Omega \left[ \frac{\left(\sigma_x - \nu \, \sigma_y\right)}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right) + \frac{\left(\sigma_y - \nu \, \sigma_x\right)}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right) \right. \qquad (4.14)$$

$$\left. + \frac{(2\nu - 1) m \, \theta}{E} (\Delta_1 \Phi - 2V) - 2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} \right] dx \, dy$$

ينتج عن (4.1) و(4.2) و (4.4) و (4.5) و(4.14) أن دالي التغاير: $\Pi_S^{BMF}$ يأخذ الشكل:

---

[1] ينتج ذلك عن كزن كلاً من $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ و $\gamma_{xy}$ يعبر عنها بدلالة الإزاحات $u$ , v، فقط ، من خلال العلاقات الهندسية التالية المحققة في $\Omega \times T^+$ : $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ , $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ , $\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ .

$$\Pi_S^{\mathrm{BMF}} = h \int_{\Omega} \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx\,dy \; +$$

$$h \int_{\Omega} \left[ \frac{\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right)}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right) + \frac{\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right)}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(2\nu - 1)\,m\,\theta}{E} \left(\Delta_1 \Phi - 2V\right) - 2\frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} \right] dx\,dy \qquad (4.15)$$

$$-h \int_{\Omega} \left( B_x u + B_y v \right) dx\,dy - \int_{\pounds_1} \left( \bar{P}_x u + \bar{P}_y v \right) d\,\ell_1$$

$$- \int_{\pounds_2} \left( P_x \bar{u} + P_y \bar{v} \right) d\,\ell_2,$$

باتباع طريقة مشابهة للطريقة المتبعة في [3] نجد إن شرط انتظام دالي التغاير: $\Pi_S^{\mathrm{BMF}}$ ، بعد سلسلة من العمليات الجبرية، مروراً باستخدام بمبرهنة غرين، يأخذ الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi_S^{\mathrm{BMF}} = h \Bigg\{ & \int_{\Omega} \Bigg[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u \; + \\
& + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v \Bigg] d\,\Omega + \\
& + \frac{1}{E} \int_{\Omega} \Bigg[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sigma_y - \nu\, \sigma_x \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \sigma_x - \nu\, \sigma_y \right) + \\
& + (2\nu - 1)\, m \;\Delta_1 \theta - 2\,(1+\nu)\, \frac{\partial^2\, \tau_{xy}}{\partial x\, \partial y} \Bigg] \delta\Phi \, d\,\Omega \Bigg\} \\
- h \Bigg\{ & \int_{\pounds_1} \Big[ \left( \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{P}_x \right) \delta u + \left( \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y - \bar{P}_y \right) \delta v \Big] d\,\ell_1 \\
& + \int_{\pounds_2} \Big[ (u - \bar{u})\, \delta\left( \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \right) + (v - \bar{v})\, \delta\left( \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \right) \Big] d\,\ell_2 \\
& + \frac{1}{E} \int_{\pounds} \Bigg[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_y - \nu\, \sigma_x + (2\nu - 1)\, m\, \theta \right) n_x + \\
& \qquad + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_x - \nu\, \sigma_y + (2\nu - 1)\, m\, \theta \right) n_y \\
& - (1+\nu) \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} n_y + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} n_x \right) \Bigg] \delta\Phi \, d\,\ell \Bigg\} = 0 \,,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

وينتج عن العلاقة (4.16) مايلي:

أولاً : معادلات الحقل المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$ : وهي مؤلفة:

أ- معادلات الحركة المحققة ضمن $\Omega \times \mathrm{T}$ : ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء السطحي للتكامل (4.16) يجب أن تنعدم أمثال التغيرات: $(\delta u \,, \delta v)$ ، حيث نحصل على معادلتي الحركة التاليتين المحققتين في $\Omega \times \mathrm{T}$ :

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;, \\
& \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

ب – معادلة توافق الانفعالات المعبر عنها بلغة الإجهادات والحرارة، والمحققة ضمن $\mathrm{T}\times\Omega$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء السطحي للتكامل (4.16) يجب أنه تنعدم أمثال تغير دالة الإجهاد: $\delta\Phi$، حيث نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\mathrm{T}\times\Omega$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y-\nu\,\sigma_x\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x-\nu\,\sigma_y\right)+(2\nu-1)m\ \Delta_1\theta\\ -2\,(1+\nu)\ \frac{\partial^2\,\tau_{xy}}{\partial x\ \partial y}=0\ ,\end{gathered}\qquad(4.18)$$

ثانياً: الشروط الحدية المحققة على $\mathrm{T}\times\pounds$: وهي مؤلفة:

ج – شروط الجر الحدية المحققة على $\mathrm{T}\times\pounds_1$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء المنحني للتكامل (4.16) على جزء المنحني $\pounds_1$، يجب أن تنعدم أمثال التغيرات $(\delta u\,,\delta v)$، فنحصل على الشروط الحدية التالية المحققة على $\mathrm{T}\times\pounds_1$:

$$\sigma_x\,n_x+\tau_{xy}\,n_y=\bar{P}_x\quad,\quad\tau_{xy}\,n_x+\sigma_y\,n_y=\bar{P}_y\ ,\qquad(4.19)$$

د- شروط توافق الانفعالات، الحدية، مًعبراً عنها بلغة الإجهادات والحرارة، والمحققة على كامل المنحني $\pounds$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء المنحني للتكامل (4.16) على كامل المنحني $\pounds$ ، يجب أن تنعدم أمثال التغير $\delta\Phi$، فنحصل على الشرط الحدي التالي المحقق على $\mathrm{T}\times\pounds$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma_y-\nu\,\sigma_x+(2\nu-1)m\,\theta\right]n_x+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma_x-\nu\,\sigma_y+(2\nu-1)m\,\theta\right]n_y\\ -\ (1+\nu)\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}\,n_y+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}\,n_x\right)=0\ ,\end{gathered}\qquad(4.20)$$

إن شروط الجر الحدية (4.19) هي شروط مألوفة في مسألة الحالة الترموديناميكية المستوية للانفعالات المرنة للجسم الصلب، بينما الشرط الحدي (4.20) هو الشرط الجديد المسمى بشرط توافق الانفعالات، الحدي على $\mathrm{T}\times\pounds$، معبراً عنه بلغة الإجهادات والحرارة.

هـ– شروط الاستمرار الحدية المحققة على $\mathrm{T}\times\pounds_2$: ونحصل عليها من حقيقية أنه في الجزء المنحني للتكامل (4.16) على جزء المنحني $\pounds_2$، يجب أن تنعدم أمثال

التغيرات $\delta\left(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y\right)$ و $\delta\left(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y\right)$، فنحصل على الشروط الحدية التالية المحققة على $\pounds_2 \times \mathrm{T}$:

$$u = \bar{u} \ , \ v = \bar{v} \ , \qquad (4.21)$$

هذا من جهة أولى. ومن جهة أخرى، باتباع طريقة اغناتشاك [6]، لنوجد الآن معادلات بيلترامي – ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية للجسم الصلب المدروس هوك انطلاقاً من معادلات لامي التالية لهذا الجسم، والمحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$ [2]:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\Box}{}_2^2 u + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{2m}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{B_x}{\mu} = 0 \,, \\
&\overset{*}{\Box}{}_2^2 v + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{2m}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{B_y}{\mu} = 0 \,, \qquad (4.22) \\
&\hat{\mathrm{D}}\theta + \frac{2\mu m T_0}{k(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}\right) = -\frac{r}{k} \,,
\end{aligned}$$

حيث: $\overset{*}{\Box}{}_2^2 = \Delta_1 - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$، و $\hat{c}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ،

ومن العلاقات الهندسية التالية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (4.23)$$

ومن العلاقات التأسيسية العكسية (4.6) المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$، باتباع مايلي:

بحذف الإزاحات: $(u, v)$ معادلات لام (4.22) والعلاقات الهندسية (4.23)، نحصل على المعادلات التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

---

[2] تنتج معادلتا لامي Lameالأولى والثانية في (4.22) من تعويض العلاقات الهندسية (4.23) في العلاقات التأسيسية (وهي العلاقات الناتجة عن حل العلاقات (4.6) بالنسبة للإجهادات) ، من ثم تعويض الناتج في معادلات الحركة (4.17) ، أما معادلة Lame الثالثة في (4.22) فتنتج من تعوض العلاقات الهندسية (4.23) في معادلة التوصيل الحراري (4.7).

$$\overset{*}{\Box}{}_2^2\,\varepsilon_x+\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\frac{2m}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_x}{\partial x}=0,$$

$$\overset{*}{\Box}{}_2^2\,\varepsilon_y+\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\frac{2m}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_y}{\partial y}=0,$$

$$\overset{*}{\Box}{}_2^2\,\gamma_{xy}+\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\frac{2m}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+ \qquad (4.24)$$

$$+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)=0,$$

$$\widehat{\mathrm{D}}\theta+\frac{2\mu m T_0}{k(\lambda+2\mu)}\left(\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_y\right)=-\frac{r}{k},$$

أخيراً، بتعويض العلاقات التأسيسية العكسية (4.6) في المعادلات (4.24)، من ثم التبسيط وال نحصل على المعادلات الأربع التالية، المحققة في $\Omega\times T^+$:

$$\overset{*}{\Box}{}_2^2\left[\sigma_x-\nu\,\sigma_y+(2\nu-1)m\,\theta\right]+$$

$$+(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{E}{\mu}\frac{\partial B_x}{\partial x}=0,$$

$$\overset{*}{\Box}{}_2^2\left[\sigma_y-\nu\,\sigma_x+(2\nu-1)m\,\theta\right]+$$

$$+(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{E}{\mu}\frac{\partial B_y}{\partial y}=0, \qquad (4.25)$$

$$\overset{*}{\Box}{}_2^2\,\tau_{xy}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{\partial B_x}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial x}=0,$$

$$D'\theta+\frac{mT_0}{k(2\mu+3\lambda)}(\dot{\sigma}_x+\dot{\sigma}_y)=-\frac{r}{k},$$

حيث: $D':=\Delta_1-\frac{1}{k}\left(c+\frac{3m^2T_0}{3\lambda+2\mu}\right)\frac{\partial}{\partial t}$ ,.

وهي معادلات بيلترامي – ميشيل المعممة التالية، إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات للجسم الصلب المرن المدروس هوك.

نضيف الشروط الابتدائية التالية المحققة في $\Omega\times\{0\}$ [3] إلى معادلات بيلترامي – ميشيل المعممة السابقة:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 \ , \ \sigma_y = \sigma_y^0 \ , \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 \ , \quad \theta = \theta^0 \ , \qquad (4.26)$$

و:

$$\dot\sigma_x = \dot\sigma_x^0 \ , \ \dot\sigma_y = \dot\sigma_y^0 \ , \quad \dot\tau_{xy} = \dot\tau_{xy}^0 \ , \quad \dot\theta = \dot\theta^0 \ , \qquad (4.27)$$

حيث:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^0 &= 2\mu\,\varepsilon_x^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left[\lambda\left(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0\right) + m\,\theta^0\right],\\
\sigma_y^0 &= 2\mu\,\varepsilon_y^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left[\lambda\left(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0\right) + m\,\theta^0\right],\\
\tau_{xy}^0 &= 2\mu\gamma_{xy}^0 \ ,
\end{aligned} \qquad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
\dot\sigma_x^0 &= 2\mu\,\dot\varepsilon_x^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left[\lambda\left(\dot\varepsilon_x^0 + \dot\varepsilon_y^0\right) + m\,\dot\theta^0\right],\\
\dot\sigma_y^0 &= 2\mu\,\dot\varepsilon_y^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left[\lambda\left(\dot\varepsilon_x^0 + \dot\varepsilon_y^0\right) + m\,\dot\theta^0\right],\\
\dot\tau_{xy}^0 &= 2\mu\dot\gamma_{xy}^0 \ ,\\
\dot\theta^0 &= \frac{k\,(3\lambda+2\mu)}{c\,(3\lambda+2\mu)+3m^2T_0}\left[\Delta_1\theta^0 + \frac{2\mu m\,T_0}{k\,(\lambda+2\mu)}\left(\dot\varepsilon_x^0 + \dot\varepsilon_y^0\right) + \frac{r^0}{k}\right],
\end{aligned} \qquad (4.29)$$

وحيث:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \ , \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x} \ , \ \gamma_{xy}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}\right) \ , \qquad (4.30)$$

[3] تنتج هذه الشروط الابتدائية عن الشروط الابتدائية للإزاحات، ولسرع هذه الإزاحات، ولحقل درجات الحرارة ، وعن العلاقات الهندسية (4.23) والعلاقات التأسيسية الموافقة للعلاقات التأسيسية العكسية (4.6)، ومعادلة التوصيل الحراري (4.7).

$$\dot{\varepsilon}_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}\ ,\dot{\varepsilon}_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x}\ ,\ \dot{\gamma}_{xy}^0 = \frac{1}{2}(\frac{\partial \dot{u}^0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}^0}{\partial x})\ , \qquad (4.31)$$

أيضاً: $u^0 , v^0$ على الترتيب تمثل الإزاحات الابتدائية، أو القيم الابتدائية للإزاحات $u , v$، أمّا $\dot{u}^0 , \dot{v}^0$ ، فهي تمثل، على الترتيب ، السرع الابتدائية للإزاحات أو القيم الابتدائية للسرع: $\dot{u} , \dot{v}$ . أخيراً: $r^0$ تمثل القيمة الابتدائية للمصادر الحرارية: $r$ .

**تعريف 1**− (مسألة القيم الحدّية والابتدائية المختلطة لمعادلات بيلترامي − ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات لجسم المرن المدروس):

نسمي معادلات بيلترامي − ميشيل الترموديناميكية المعممة (4.25)، مضافاً لها الشروط الابتدائية (4.31)−(4.26) وشروط الجر الحدّية، الترموديناميكية (4.19)، وشروط توافق الانفعالات، الحدّية، الترموديناميكية (معبّر عنها بالإجهادات والحرارة) (4.20) والشروط الحدّية الحرارية (4.9) ، وشروط الاستمرار الحدّية، الترموديناميكية، بالإزاحات (4.21) ، نسميها بمسألة القيم الحدّية والابتدائية المختلفة لمعادلات بيلترامي − ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات لجسم المرن المدروس.

*الصياغة المكتملة لمعادلات بلترامي ميشيل لأجل الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم المعتبر هوك* تتألف هذه الصياغة من:

− مسألة القيم الحدّية والابتدائية المختلفة لمعادلات بيلترامي − ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات لجسم المرن المدروس، وهي.

− العلاقات التأسيسية العكسية (4.6).

− العلاقات الهندسية (4.23).

*آلية حل المسألة:*

1) بحل مسألة القيم الحدّية والابتدائية المختلفة لمعادلات بيلترامي− ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات للجسم المدروس، ضمن شروطها الابتدائية وشروطها الحدية (ماعدا شروط الاستمرار الحدية الترموديناميكية بالإزاحات (4.21))، نحصل على الإجهادات والحرارة: $\sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} , \theta$ .

2) نعوض ذلك في العلاقات التأسيسية العكسية (4.6)، فنحصل على الانفعالات:

$$\varepsilon_x \ \ , \varepsilon_y \ \ , \gamma_{xy}$$

3) بمكاملة العلاقات الهندسي (4.23) (التي أصبحت أطرافها اليسرى معلومة)، بالنسبة للإزاحات، ضمن شروط الاستمرار الحدية الترموديناميكية بالإزاحات (4.21)، نحصل على الإزاحات: $u\ ,v$، وبهذا الشكل نكون قد حصلنا على جميع الحقول الفيزيائية المطلوبة.

## 5. الاستنتاجات والمقترحات:

***أولا ) الاستنتاجات:*** ناقشنا الصياغة المكتملة (بشكلها المختلط) لمعادلات بيلترامي – ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك الصلب المرن، والمتجانس والمتماثل المناحي.

***ثانياً ) المقترحات:*** يمكن أن نختتم هذا البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

- تعميم شرط انتظام التغاير الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لجسم مرن استقطابي في المرونة الخطية الاستقطابية، التحريكية، التي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.
- تعميم شرط انتظام التغاير الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لمائع تقليدي ولمائع استقطابي في الهيدروديناميك التقليدي والهيدروديناميك الاستقطابي، التي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.
- تعميم شرط انتظام التغاير الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لجسم مرن دقيق الاستقطاب في المرونة الخطية دقيقة الاستقطاب

التحريكية، التي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.

- ❖ تعميم شرط انتظام التغاير الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لمائع دقيق الاستقطاب في الهيدلروديناميك دقيق الاستقطاب، والتي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.

# المراجع

[1]- S.N. Patnaik , I.Kaljevic , D.A.Hopkins and S.Saigal, (1995), **Completed Beltrami-Michell formulation for mixed boundary value problems in elasticity**, NASA Technical Memorandum 106809 (1995).

[2]- S.N. Patnaik , D.A.Hopkins, (2001), **Stress Formulation in Three-Dimensional Elasticity** , NASA/TP 210515 (2001).

[3]- S.N. Patnaik, (1986), **The Variational Energy Formulation for the Integrated Force Method** , AIAA JOURNAL, VOL. 24, NO. 1, JANUARY 1986, p.129-137.

[4]- S.N. Patnaik , D.A.Hopkins, (2004), **Strength of Materials, A new Unified Theory for the 21st Century**, Copyright © 2004, Elsevier (USA).

[5]- Ignaczak, J., (1959), **Direct determination of stresses from the stress equations of motion elasticity**, Arch. Mech.Stos.5, 9.

[6] – Ignaczak , J. , (1963), **A completeness problem for stress equations of motion in the linear elasticity**, Arch.Mech. 15, 225-234.

[7]- W. Nowocki , (1970), **Theory of Elasticity** , PWN Warsaw.

[8]- Attiah, W., (2020), **The Boundary Compatibility Conditions (BCC) Relating to Unique Solution for Beltrami–Michell equations in Complicated Microstructure Media,** PhD Thesis, Department of Mathematics, Faculty of Science, Al-Baath University.