دراسة تحريكيه لآلة واط (II) و للآلة الناتجة عن دمج آلتي واط (II) بوصلة ذات مفصلين

طالبة الماجستير : لمى حاتم الكاسوح
قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث
إشراف الدكتور: مصطفى حسن

ملخص البحث

تعتبر آلة واط (II) ، من النموذج الثاني من الآلات ذات الأهمية الخاصة في مجال الهندسية الميكانيكية؛ وخاصة هندسة التصميم. يعرض هذا البحث دراسة تحريكيه بطريقتين (نظرية الطاقة الحركية ونظرية العزم الحركي) لآلة واط (II) و للآلة الناتجة عن دمج آلتي واط(II)،الموافقة للنمط الثالث (ربط آلتي واط (II) بوصلة ذات مفصلين) ولاحظنا الحصول على نفس النتائج باستخدام الطريقتين وحصلنا على معادلة تفاضلية واحدة ، وهذا يتوافق مع وجود وسيط حر وحيد يحدد حركة الآلة في حالة الوصل بمفصلين.

وتكمن أهمية هذه الدراسة في الحصول على إنتاج أكثر و وقت أقل .

الكلمات المفتاحية :

وصلة ذات مفصلين –مفصل مرن – حركة– آلة واط (II).

A Dynamic study of watt(II)bar mechanism and double watt(II) linked by two joints

Abstract

Watt(II) machine of the second model can be considered as an important machine that has special importance in the field of mechanical engineering and most important in design engineering.

This paper introduces a dynamic study through two ways (kinematic energy theory and kinematic momentum theory) for watt(II) machine and the resultant machines of merging two-watt (II) machines, which responding to the third model .

Through which we achieved the same results by getting one differential equation ,which in turn corresponds with the existance of one free parameter that determines the movement of result machine.

The importance of this study consists in obtaining more production and less time .

Key words :

link two joints -Elastic Hinge-Movement-watt(II) bar mechanism.

مقدمة :

- **دراسة مرجعية :**

عام 2006قام كل من الباحثين حسن وليلوف بدراسة منظومة ميكانيكية مستوية، وقد تم إيجاد موضع نقطة اختيارية من أي جسم ضمن المنظومة بالنسبة للجملة الثابتة (على اعتبار أن الجملة الثابتة هي الآلة التقليدية) قبل تبديل المفاصل التقليدية بمفاصل عالية المرونة [1].

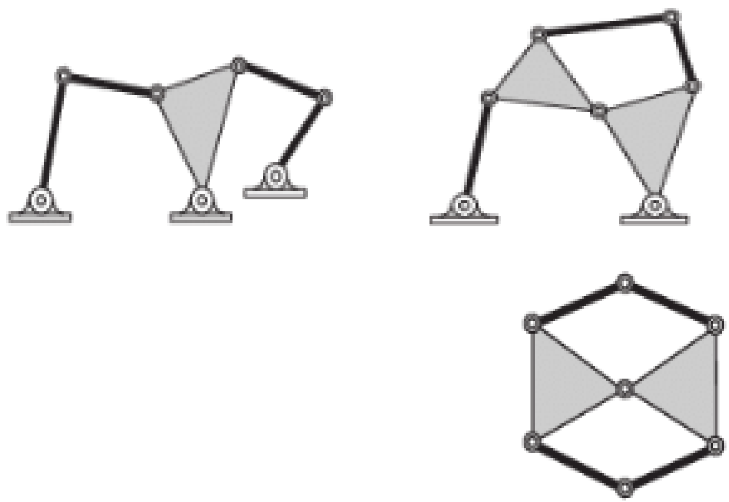
وفي عام 2007 تم تقديم دراسة تحليلية لإيجاد كل من الموضع السرعة والتسارع لآلة واط (II) . [5]

وبعام 2008أوجدوا خوارزمية وتم اختبارها على آلة واط واستخدموا كثيرة الحدود ثنائية الخطية التي قدمها sovoboda في عام 1944،و هذه الخوارزمية استخدمت لتسريع الحسابات الميكانيكية[6] .

أما في 2012انطلق الباحث من آلة ناتجة عن وصل آلتين رباعيتين ولاحظ الباحث عدم تأثير إزالة الأضلاع المتشابهة، مع بقاء عمل الآلة نفسها و هذا ينعكس على توفير الطاقة والزمن ،إضافةً للتوفير الاقتصادي[7] .

وفي المرجع [8] تم دراسة آلة واط من خلال تعميم آلة الرباعية بعام 2015.

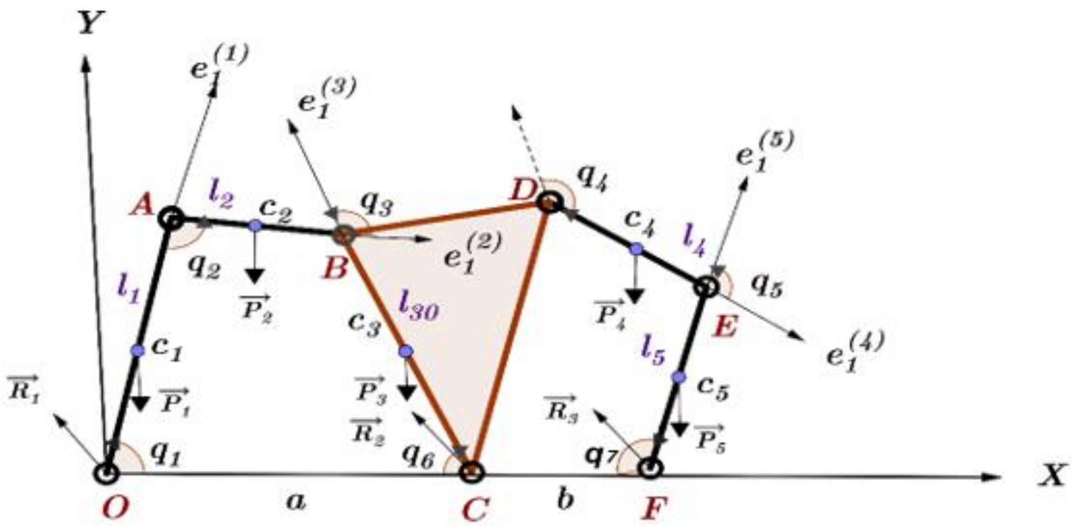
- في البداية لا بد لنا من تعريف آلة واط هي آلة جزئية ضمن المنظومة وقد تكون آلة بحد ذاتها ولدينا ثلاث أنواع لآلة واط وهي :



Watt(II) Watt(I)

watt

وسوف نركز دراستنا على آلة واط (II) التي تتكون من ستة أجسام بما فيها الجسم الثابت (الجسم الصفريS_0) وأحد هذه الأجسام عبارة عن صفيحة مثلثية وهو جسم الهدف (الخاص) ويربط هذه الأجسام سبعة مفاصل دورانية .



الشكل (1)

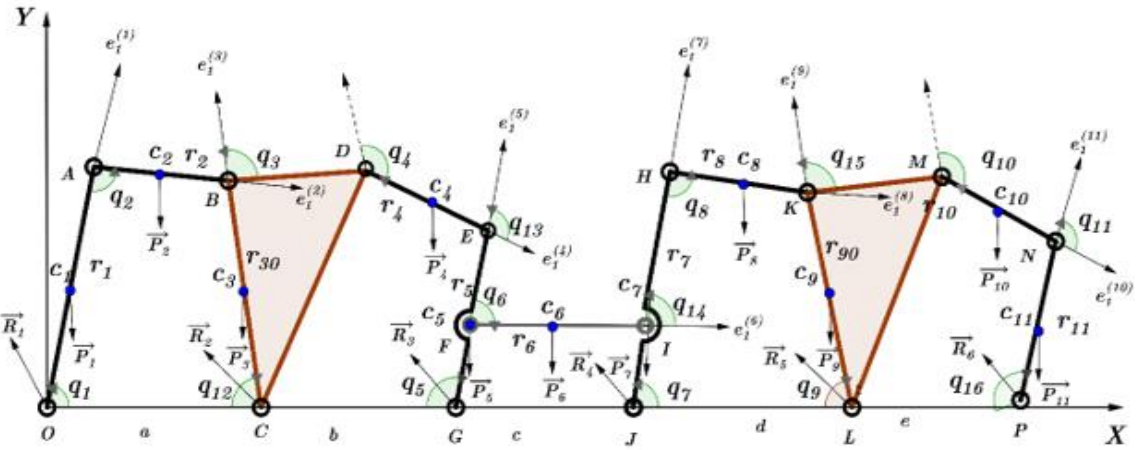
وتستخدم آلة واط (II) إذا كانت آلة بحد ذاتها غير مرتبطة بالآت أخرى، كما هو الحال في الجارفة والحفارة والكسارة وتستخدم أيضاً لتحليه مياه البحر وفي مفاصل ركبة الرجل آلي .

الشكل (1) يوضح لنا آلة واط **(II)** والوسطاء الكافية لتعين وضع هذه الآلة مع القوى الخارجية المؤثرة على آلة واط **(II)** ونقاط تأثيرها .

حيث أن OXY جملة مقارنة ثابتة قاعدتها $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، تمثل المستوي الشاقولي الثابت الذي تتحرك فيه هذه الآلة والقضبان المتحركة في هذه الآلة هي: OA, AB, CB, DE, FE.

ونفترض أن كتلة كل من القضبان OA, AB, CB, DE, FE هي m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ،على الترتيب والتي تملك الأطوال $L_1, L_2, L_{30}, L_4, L_5$ ،على الترتيب.

وسوف نعرض الآلة الناتجة عن دمج آلتي واط (II) بوصلة ذات مفصلين، التي تتيح لنا توفير الوقت وزيادة الإنتاج.



الشكل (2)

وتتكون هذه الآلة من اثني عشر جسماً وستة عشر مفصلاً دورانياً .

إن الشكل (2) يوضح لنا المخطط التفصيلي للآلة الناتجة عن دمج آلتي واط (II) بوصلة ذات مفصلين مع القوى الخارجية المؤثرة على المجموعة المادية المكونة لهذه آلة ومراكز كتل قضبان هذه الآلة و الوسطاء الكافية لتعيين موضع هذه الآلة .

ونفترض أن كتلة كل من القضبان $OA, AB, CB, DE, GE, IF, JH, HK, LK, MN, PN$

هي: $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}$ ،على الترتيب والتي تملك

الأطوال:$r_1, r_2, r_{30}, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_{90}, r_{10}, r_{11}$،على الترتيب.

و عملية الوصل تتم بمفاصل تقليدية دورانية وبذلك نكون قد حصلنا على آلة جديدة بمفاصل دورانية ، ثم سنقوم بتبديل المفاصل الدورانية بمفاصل المرنة نظراً لفوائدها العديدة بالمقارنة مع نظيراتها التقليدية فينتج لدينا آلة جديدة ثانية مطورة عن الآلة الجديدة السابقة .

تعتبر المفاصل المرنة أجزاء أساسية ضمن الآلة المرنة .

يعرف المفصل المرن على أنه جزء مرن بقياسات صغيرة ،يفصل بين جسمين صلبين والذي يتيح للجسمين القيام بحركة دورانية نسبية محدودة ضمن آلة معينة .[3] و[4].

يمكن إيجاز أبرز ميزات وفوائد هذه المفاصل كما يلي :

- لا حاجة لصيانتها إطلاقاً كما إن الاحتكاك معدوم فيها ، انعدام ردود الفعل الانعكاسية ، انعدام الفراغات بين المحور وحجرة الدوران ، المتانة وخفة الوزن وسهولة التصنيع ، المقدرة على استخدامها في التطبيقات التي تتطلب قياسات صغيرة للأجسام

إن هذه الميزات تجعل استخدامها يزداد يوما بعد يوم و هذا ما يقود إلى الاهتمام ببناء نظرية متكاملة حول هذه المفاصل .

تعتبر الميزات التي ذكرناها أعلاه ذات أهمية خاصة عند التطبيق وخاصة أن الآلة غالباً ما تكون في وسط يعرضها للاهتراء السريع (عوامل الطقس وما شابه).

1. هدف البحث:

إيجاد المعادلات التفاضلية لمنظومة مستوية مكوَّنة من آلة واط (II) وآلتي واط (II) بوصلة ذات مفصلين والتي تتمثل بمعادلة وحيدة سوف نحصل عليها بطريقتين:

_الطريقة الأولى (بتطبيق نظرية الطاقة الحركية على هذه الآلة).

_الطريقة الثانية (بتطبيق نظرية العزم الحركي).

وبالتالي فأن أهمية عملية الوصل تؤمن لنا مضاعفة في الإنتاج و سرعة في انجاز العمل. كما أننا نحصل على منظومة طويلة الأمد ودون الحاجة إلى الصيانة، إضافة لسلاسة الحركة الخالية من ردود الأفعال الانعكاسية.

2. طرق ونتائج البحث :

سنستخدم نظريتي الطاقة الحركية و العزم الحركي لإيجاد المعادلات التفاضلية و سنحصل على معادلة تفاضلية واحدة لوجود وسيط مستقل وحيد وسنحصل على نفس النتائج بطريقتين ،ويتيح لنا ذلك تقليل المصاريف وتحسين الإنجاز وتوفير الوقت[2] .

❖ لإيجاد معادلة التفاضلية لآلة واط (II):

<u>**أولاً:**</u> بتطبيق نظرية الطاقة الحركية :

$$T_0(S) = U + \square \quad (1)$$

حيث أن:

- $T_0(S)$ الطاقة الحركية للمجموعة المادية المكونة لآلة واط **(II)**.
- U مجموع أعمال القوى الخارجية .
- h ثابت يمكن حسابه من شروط البدء.

إن الطاقة الحركية لآلة واط **(II)** تحسب بالشكل :

$$T_0(S) = T_0(OA) + T_0(AB) + T_0(CB) + T_0(DE) + T_0(FE) \quad (2)$$

الآن لنحسب الطاقة الحركية للمجموعة المادية الممثلة لآلة واط **(II)** .

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب OA :

الطاقة الحركية للقضيب OAالذي كتلته m_1 وطوله L_1 ويتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي OZ والعمودي على مستوى الحركة ، تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(OA) = \frac{1}{2}.I_{OZ}.\dot{q_1}^2 = \frac{1}{2}(\frac{m_1.L_1^2}{3}).\dot{q_1}^2 \Rightarrow T_0(OA) = \frac{1}{6}m_1.L_1^2.\dot{q_1}^2 \quad (3)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب AB:

الطاقة الحركية للقضيب AB الذي كتلتهm_2 وطوله L_2 ويتحرك حركة مستوية عامة في المستوي OXY، ولإيجاد طاقته الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية بالشكل :

$$T_0(AB) = T_{c_2}(AB) + T_0(c_2)$$

حيث أن :

$T_{c_2}(AB)$ الطاقة الحركية للقضيب ABبالنسبة لمركز كتله c_2.

$T_0(c_2)$ الطاقة الحركية لمركز كتلc_2 للقضيب AB بالنسبة للمبدأ o .

إن القضيب AB يتحرك دورانية حول المحور المار من مركز كتلته c_2 والعمودي على مستوي الحركة ،أي c_2Z وبالتالي فإن :

$$T_{c_2}(AB)=\frac{1}{2}.I_{c_2Z}.\dot{q_2}^2=\frac{1}{2}(\frac{m_2.L_2^2}{12}).\dot{q_2}^2 \Rightarrow T_{c_2}(AB)=\frac{1}{24}.m_2.L_2^2.\dot{q_2}^2$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل c_2 للقضيب AB بالنسبة للمبدأ o فهي :

$$T_0(c_2)=\frac{1}{2}.m_2.v^2(c_2)$$

لحساب $\vec{v}(c_2)$ نوجد متجه الموضع $\overrightarrow{oc_2}$ بالشكل :

$$\overrightarrow{Oc_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{Ac_2}=\left(L_1\cos q_1+\frac{1}{2}.L_2\cos(q_1+q_2)\right)\vec{i}+\left(L_1\sin q_1+\frac{1}{2}.L_2\sin(q_1+q_2)\right)\vec{j}$$

وبالتالي متجه السرعة هو :

$$\vec{v}(c_2)=\left(-L_1\dot{q}_1\sin q_1-\frac{1}{2}.L_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_1+q_2)\right)\vec{i}+\left(L_1\dot{q}_1\cos q_1+\frac{1}{2}.L_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos$$

ومنه الطاقة الحركية $T_0(c_2)$ هي :

$$T_0(c_2)=\frac{1}{2}.m_2.\left[L_1^2.\dot{q_1}^2+\frac{1}{4}.L_2^2.(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2+L_1.L_2.\dot{q}_1.(\dot{q}_1+\dot{q}_2).\cos q_1\right]$$

وبالتالي الطاقة الحركية للقضيب AB تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(AB)=\frac{1}{24}.m_2.L_2^2.\dot{q_2}^2+\frac{1}{2}.m_2.\left[L_1^2.\dot{q_1}^2+\frac{1}{4}.L_2^2.(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2+L_1.L_2.\dot{q}_1.(\dot{q}_1+\dot{q}_2).\cos q_1\right] \quad (4)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب CB:

الطاقة الحركية للقضيب CBالذي كتلته m_3وطوله L_{30} ويتحرك حركة دورانية حول المحور ا CZ والعمودي على مستوى الحركة تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(CB) = \frac{1}{2}.I_{CZ}.\dot{q_6}^2 \Rightarrow T_0(CB) = \frac{1}{6}.m_3.L_{30}^2.\dot{q_6}^2 \quad (5)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب DE:

الطاقة الحركية للقضيب DEالذي كتلته m_4 وطوله L_4 ويتحرك حركة مستوية عامة في المستوي OXY تعطى بحسب نظرية كونيغ الثانية بالشكل :

$$T_0(DE) = T_{c_4}(DE) + T_0(c_4)$$

بما أن القضيب DEيتحرك دورانية حول المحور المار من مركز كتلته c_4 والعمودي على مستوي الحركة أي c_4Z ، فإن :

$$T_{c_4}(DE) = \frac{1}{2}.I_{c_4Z}.\dot{q_4}^2 \Rightarrow T_{c_4}(DE) = \frac{1}{24}.m_4.L_4^2.\dot{q_4}^2$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل c_4 للقضيب DEبالنسبة للمبدأ o فهي :

$$T_0(c_4) = \frac{1}{2}.m_4.v^2(c_4)$$

لحساب $\vec{v}(c_4)$ نوجد متجه الموضع $\overrightarrow{oc_4}$ بالشكل :

$$\overrightarrow{Oc_4} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{Dc_4}$$

$$\overrightarrow{Oc_4} = \left(a + L_{30}\cos(q_6+\alpha) + \frac{1}{2}.L_4\cos(q_3+q_4)\right)\vec{i} + \left(L_{30}\sin(q_6+\alpha) + \frac{1}{2}.L_4\sin(q_3+q_4)\right.$$

حيث أن:

$$a = \left|\overrightarrow{OC}\right|$$

L_{30} هو الطول بين C و B

وبالتالي متجه السرعة هو :

$$\vec{v}(c_4)=\left(-L_{30}\dot{q}_6\sin(q_6+\alpha)-\frac{1}{2}.L_4(\dot{q}_3+\dot{q}_4)\sin(q_3+q_4)\right)\vec{i}+\left(L_{30}\dot{q}_6\cos(q_6+\alpha)+\frac{1}{2}.L_4$$

وبالتربيع نجد :

$$v^2(c_4)=L_{30}^2.\dot{q}_6^{\,2}+\frac{1}{4}.L_4^2.(\dot{q}_3+\dot{q}_4)^2+L_{30}.L_4.\dot{q}_6.(\dot{q}_3+\dot{q}_4).\cos(q_3+q_4-q_6-\alpha)$$

ومنه الطاقة الحركية $T_0(c_4)$ هي :

$$T_0(c_4)=\frac{1}{2}.m_4.\left[L_{30}^2.\dot{q}_6^{\,2}+\frac{1}{4}.L_4^2.(\dot{q}_3+\dot{q}_4)^2+L_{30}.L_4.\dot{q}_6.(\dot{q}_3+\dot{q}_4).cos(q_3+q_4-q_6-\alpha)\right]$$

وبالتالي الطاقة الحركية للقضيب DEتعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(DE)=\frac{1}{24}.m_4.L_4^2.\dot{q}_4^{\,2}+\frac{1}{2}.m_4.\left[L_{30}^2.\dot{q}_6^{\,2}+\frac{1}{4}.L_4^2.(\dot{q}_3+\dot{q}_4)^2+L_{30}.L_4.\dot{q}_6.(\dot{q}_3+\dot{q}_4).\cos(q\right.$$

- ❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب FE:
- ❖ الطاقة الحركية للقضيب FEالذي كتلته m_5وطوله L_5 ويتحرك حركة دورانية حول المحور FZ والعمودي على مستوى الحركة تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(FE)=\frac{1}{2}.I_{FZ}.\dot{q}_7^{\,2}\Rightarrow T_0(FE)=\frac{1}{6}.m_5.L_5^2.\dot{q}_7^{\,2}\qquad(7)$$

نعوض$(7),(6),(5),(4),(3)$ في العلاقة (2) نحصل على الطاقة الحركية لآلة واط **(II)**بالشكل :

$$T_0(S) = \frac{1}{6}m_1.L_1^2.\dot{q_1}^2 + \frac{1}{24}.m_2.L_2^2.\dot{q_2}^2 + \frac{1}{2}.m_2.\left[L_1^2.\dot{q_1}^2 + \frac{1}{4}.L_2^2.(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + L_1.L_2.\dot{q}_1.(\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\cos q_1\right] + \frac{1}{6}.m_3.L_{30}^2.\dot{q_6}^2 + \frac{1}{24}.m_4.L_4^2.\dot{q_5}^2 + \frac{1}{2}.m_4.\left[L_{30}^2.\dot{q_6}^2 + \frac{1}{4}.L_4^2.(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 + L_{30}.L_4.\dot{q}_6.(\dot{q}_3 + \dot{q}_4).\cos(q_3 + q_4 - q_6 - \alpha)\right] + \frac{1}{6}.m_5.L_5^2.\dot{q_7}^2 \quad (8)$$

إن القوى الخارجية المؤثرة على المجموعة المادية المكونة لآلة واط **(II)** هي قوى الثقل: $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_4}, \overrightarrow{P_5}$ للقضبان OA, AB, CB, DE, FE ،على الترتيب بالإضافة إلى قوة رد الفعل في المفصل الثابت: O و قوة رد الفعل في المفصل الثابت C قوة رد الفعل في المفصل الثابت F .

لنحسب أعمال هذه القوى :

- القوة $\overrightarrow{P_1}$ هي قوة ثقل القضيب OA ، نقطة تأثيرها c_1 وهي قوة شاقوليه نحو الأسفل وتعطى بـ $\overrightarrow{P_1} = -m_1 g\vec{j}$ ،وعملها يساوي :

$$U(\overrightarrow{P_1}) = \int \overrightarrow{P_1}.d\overrightarrow{Oc_1} = \int -m_1 g\vec{j}.d\left(\frac{1}{2}L_1 \cos q_1\, \vec{i} + \frac{1}{2}L_1 \sin q_1\, \vec{j}\right) = -\frac{1}{2}m_1 g L_1 \sin q_1$$

- القوة $\overrightarrow{P_2}$ هي قوة ثقل القضيب AB ، نقطة تأثيرها c_2 وهي قوة شاقوليه نحو الأسفل وتعطى بـ $\overrightarrow{P_2} = -m_2 g\vec{j}$ ،وعملها يساوي :

$$U(\overrightarrow{P_2}) = \int \overrightarrow{P_2}.d\overrightarrow{Oc_2} = -m_2 g(L_1 \sin q_1 + \frac{L_2}{2}\sin(q_1 + q_2))$$

❖ القوة $\overrightarrow{P_3}$ هي قوة ثقل القضيب CB، نقطة تأثيرها c_3وهي قوة شاقوليه نحو الأسفل، وتعطى بـ $\overrightarrow{P_3} = - m_3 g\vec{j}$، وعملها يساوي :

$$U(\overrightarrow{P_3}) = \int \overrightarrow{P_3}.d\overrightarrow{Oc_3}$$
$$= \int -m_3 g\vec{j}.d\left(a + \frac{1}{2}L_{30}\cos q_6\,\vec{i} + \frac{1}{2}L_{30}\sin q_6\,\vec{j}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}m_3 g L_{30}\sin q_6$$

❖ القوة $\overrightarrow{P_4}$ هي قوة ثقل القضيب DE، نقطة تأثيرها c_4وهي قوة شاقوليه نحو الأسفل ،وتعطى بـ $\overrightarrow{P_4} = -m_4 g\vec{j}$وعملها يساوي :

$$U(\overrightarrow{P_4}) = \int \overrightarrow{P_4}.d\overrightarrow{Oc_4}$$
$$= -m_4 g\left(L_{30}\sin(q_6+\alpha) + \frac{1}{2}.L_4\sin(q_3+q_4)\right)$$

❖ القوة $\overrightarrow{P_5}$ هي قوة ثقل القضيب FE ،نقطة تأثيرها c_5وهي قوة شاقوليه نحو الأسفل وتعطى بـ $\overrightarrow{P_5} = -m_5 g\vec{j}$،وعملها يساوي :

$$U(\overrightarrow{P_5}) = \int \overrightarrow{P_5}.d\overrightarrow{Oc_5}$$
$$= \int -m_5 g\vec{j}.d\left(a + b\frac{1}{2}L_5\cos q_7\,\vec{i} + \frac{1}{2}L_5\sin q_7\,\vec{j}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}m_5 g L_5\sin q_7$$

- القوة $\overrightarrow{R_1}$هي قوة رد الفعل في المفصل الثابت O والتي عملها معدوم لأن نقطة تأثيرها ساكنة وبالتالي الانتقال الذي تسببه معدوم.

وبالمثل القوة$\overrightarrow{R_2}$ ؛ قوة رد الفعل في المفصل الثابت C ،عملها معدوم لنفس السبب .

والقوة $\overrightarrow{R_3}$ قوة رد الفعل في المفصل الثابت Fعملها معدوم لنفس السبب أيضاً .

مما تقدم نجد أن مجموع أعمال القوى الخارجية المؤثرة بالمجموعة المادية يعطى **بـ:**

$$U=-\frac{1}{2}m_1gL_1\sin q_1-m_2g(L_1\sin q_1+\frac{L_2}{2}\sin(q_1+q_2))$$
$$-\frac{1}{2}m_3gL_{30}\sin q_6$$
$$-m_4g\left(L_{30}\sin(q_6+\alpha)+\frac{1}{2}.L_4\sin(q_3+q_4)\right)$$
$$-\frac{1}{2}m_5gL_5\sin q_7 \quad (9)$$

نعوض العلاقتين (9) ,(8)في العلاقة (1) نجد أن:

$$\frac{1}{6}(m_1.L_1^2.\dot{q}_1^{\,2}+m_3.L_{30}^2.\dot{q}_6^{\,2}+m_5.L_5^2.\dot{q}_7^{\,2})+\frac{1}{2}(m_2.L_1^2.\dot{q}_1^{\,2}+m_2L_1.L_2.\dot{q}_1.(\dot{q}_1+\dot{q}_2).\cos q_1+$$
$$m_4L_{30}^2.\dot{q}_6^{\,2}+m_4.L_{30}.L_4.\dot{q}_6.(\dot{q}_3+\dot{q}_4).\cos(q_3+q_4-q_6-\alpha))\frac{1}{8}(m_2.L_2^2.(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2+$$
$$m_4.L_4^2.(\dot{q}_3+\dot{q}_4)^2)+\frac{1}{24}(m_2.L_2^2.\dot{q}_2^{\,2}+m_4.L_4^2.\dot{q}_5^{\,2})$$
$$=-gL_1\sin q_1(\frac{1}{2}m_1+m_2)-gL_{30}(\frac{1}{2}m_3\sin q_6+m_4\sin(q_6+\alpha))-\frac{1}{2}g(m_2L_2\sin(q_1+q_2)+$$
$$m_4L_4\sin(q_3+q_4)+m_5L_5\sin q_7)+h$$

وهي الطاقة الحركية للمجموعة المادية الممثلة لآلة واط **(II)**.

<u>**ثانياً**</u>: نطبق نظرية العزم الحركي بالنسبة للمبدأ O بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_o}(s)=\sum_{i=1}^{5}\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_i})+\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{R_i}) \quad (10)$$

لنبدأ بحساب العزم الحركي للمجموعة المادية المتمثلة بآلة واط **(II)**وذلك بحساب العزم الحركي لكل قضيب من قضبان هذه الآلة .

- ❖ حساب العزم الحركي للقضيب OA، الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة، وبالتالي :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(OA)=I_{OZ}\dot{q}_1\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{\sigma_o}(OA)=\frac{1}{3}.m_1L_1^2\dot{q}_1\vec{k} \quad (11)$$

❖ حساب العزم الحركي للقضيب AB الذي يتحرك حركة مستوية عامة في المستوي OXY وذلك يحسب من نظرية كونيغ الأولى، بالشكل :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(AB) = \overrightarrow{\sigma_{c_2}}(AB) + \overrightarrow{\sigma_o}(c_2) = I_{c_2 Z}\dot{q_2}\vec{k} + \overrightarrow{Oc_2} \wedge m_2\vec{V}(c_2)$$

$$\overrightarrow{\sigma_o}(AB) = \left(\frac{1}{12}m_2L_2^2\dot{q_2} + \frac{L_2^2}{4}m_2(\dot{q_1} + \dot{q_2}) + \frac{L_1L_2}{2}m_2(2\dot{q_1} + \dot{q_2})\cos q_2\right)\vec{k} \quad (12)$$

❖ حساب العزم الحركي للقضيب CB، الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي الثابت العمودي على مستوي الحركة، وبالتالي :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(CB) = I_{CZ}\dot{q_6}\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(CB) = \frac{1}{3}m_3L_{30}^2\dot{q_6}\vec{k} \quad (13)$$

❖ حساب العزم الحركي للقضيب DEالذي حركته المستوية العامة في المستوي ،وبالتالي بتطبيق نظرية كونيغ الأولى نجد:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(DE) = \overrightarrow{\sigma_{c_4}}(DE) + \overrightarrow{\sigma_o}(c_4) = I_{c_4 z}\dot{q_4}\vec{k} + \overrightarrow{Oc_4} \wedge m_4\vec{V}(c_4)$$

$$\overrightarrow{\sigma_o}(DE) = \left[\frac{1}{12}m_4L_4^2\dot{q_4} + a\left(m_4L_{30}\dot{q_6}\cos(q_6+\alpha) + m_4\frac{L_4}{2}(\dot{q_3}+\dot{q_4})\cos(q_3+q_4)\right) + m_4L_{30}^2.\dot{q_6} + \frac{L_4^2}{4}m_4(\dot{q_3}+\dot{q_4}) + \frac{L_{30}L_4}{2}m_4(\dot{q_3}+\dot{q_4}+\dot{q_6})\cos(q_3+q_4-q_6-\alpha)\right]\vec{k} \quad (14)$$

❖ حساب العزم الحركي للقضيب GE الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي الثابت العمودي على مستوي الحركة OXY ،وبالتالي نجد أن:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(GE) = I_{GZ}\dot{q_7}\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(GE) = \frac{1}{3}.m_5L_5^2\dot{q_7}\vec{k} \quad (15)$$

وبالتالي نجد أن:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(s)=(\frac{1}{3}.m_1L_1^2\dot{q}_1+\frac{1}{12}m_2L_2^2\dot{q}_2+\frac{L_2^2}{4}m_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)+\frac{L_1L_2}{2}m_2(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos q_2+\frac{1}{3}m_3L_{30}^2\dot{q}_6+$$
$$\left[\frac{1}{12}m_4L_4^2\dot{q}_4+a\left(m_4L_{30}\dot{q}_6\cos(q_6+\alpha)+\frac{L_4}{2}m_4(\dot{q}_3+\dot{q}_4)\cos(q_3+q_4)\right)\right]+m_4L_{30}^2.\dot{q}_6+\frac{L_4^2}{4}m_4(\dot{q}_3$$
$$+\frac{L_{30}L_4}{2}m_4(\dot{q}_3+\dot{q}_4+\dot{q}_6)\cos(q_3+q_4-q_6-\alpha)\Big]+\frac{1}{3}.m_5L_5^2\dot{q}_7)\vec{K}\quad(16)$$

لنحسب الآن عزوم القوى الخارجية المؤثرة في هذه الآلة و التي تتمثل بقوى الثقل للقضبان المكونة لهذه الآلة بالإضافة على قوى ردود الأفعال في المفاصل O , C , F

حساب عزوم قوى ثقل القضبان :

- ❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_1}$ التي هي قوة ثقل القضيبOA، وتعطى بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_1})=\overrightarrow{Oc_1}\wedge\overrightarrow{P_1}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{L_1}{2}\cos q_1 & \frac{L_1}{2}\sin q_1 & 0\\ 0 & -m_1g & 0\end{vmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_1})=-\frac{L_1}{2}m_1g\cos q_1\vec{k}\quad(17)$$

- ❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_2}$التي هي قوة ثقل القضيب AB ،ويعطى بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_2})=\overrightarrow{Oc_2}\wedge\overrightarrow{P_2}\Rightarrow\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_2})=-m_2g\left(L_1\cos q_1+\frac{1}{2}.L_2\cos(q_1+q_2)\right)\vec{k}\quad(18)$$

- ❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_3}$التي هي قوة ثقل القضيب CB ،تحسب بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_3})=\overrightarrow{Oc_3}\wedge\overrightarrow{P_3}\Rightarrow\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_3})=-m_3g\left(a+\frac{L_{30}}{2}\cos q_6\right)\vec{k}(19)$$

- ❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_4}$التي هي قوة ثقل القضيب DE ،وبالتالي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_4})=\overrightarrow{Oc_4}\wedge\overrightarrow{P_4}$$

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_4}) = -m_4 g \left(a + L_{30} \cos(q_6 + \alpha) + \frac{1}{2}.L_4 \cos(q_3 + q_4)\right)\vec{k} \quad (20)$$

- عزم القوة $\overrightarrow{P_5}$التي هي قوة ثقل القضيب GF ، وتساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_5}) = \overrightarrow{Oc_5} \wedge \overrightarrow{P_5} \Rightarrow \overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_5}) = -m_5 g \left(a + b + \frac{1}{2} L_5 \cos q_7\right)\vec{k} \quad (21)$$

حساب عزوم قوى ردود الأفعال :

- عزم القوة $\overrightarrow{R_1}$،وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت O، وعزمها يساوي الصفر لأن نقطة تأثير هذه القوة تنطبق على مركز العزم O ومنه نجد أن :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{R_1}) = \vec{0}$$

- عزم القوة $\overrightarrow{R_2}$وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت Cوتساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{R_2}) = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{R_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ R_{2x} & R_{2y} & 0 \end{vmatrix} = aR_{2y}\vec{k} \quad (22)$$

- عزم القوة $\overrightarrow{R_3}$وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت G وتحسب بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{R_3}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R_3} = (a+b)R_{3y}\vec{k} \quad (23)$$

ومنه نجد:

$$\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{Mo_oM}(\overrightarrow{P_i}) + \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{Mo_oM}(\overrightarrow{R_i}) = \left\{-\frac{L_1}{2} m_1 g \cos q_1 - m_2 g \left(L_1 \cos q_1 + \frac{1}{2}.L_2 \cos(q_1+q_2)\right) - m_3 g \left(\right.\right.$$

نعوض (16),(24) في (10) ومن ثم نسقط على$\vec{k}$ نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{d}{dt}\Big[(\frac{1}{2}(L_1L_2m_2(2\dot{q_1}+\dot{q_2})\cos q_2+am_4L_4(\dot{q_3}+\dot{q_4})\cos(q_3+q_4)$$
$$+L_{30}L_4m_4(\dot{q_3}+\dot{q_4}+\dot{q_6})\cos(q_3+q_4-q_6-\alpha))$$
$$+\frac{1}{3}(m_1L_1^2\dot{q_1}+m_3L_{30}^2\dot{q_6}+m_5L_5^2\dot{q_7})+\frac{1}{4}(L_2^2m_2(\dot{q_1}+\dot{q_2})$$
$$+L_4^2m_4(\dot{q_3}+\dot{q_4}))+\frac{1}{12}(m_2L_2^2\dot{q_2}+m_4l_4^2\dot{q_4})$$
$$+am_4L_{30}\dot{q_6}\cos(q_6+\alpha)+m_4L_{30}^2.\dot{q_6}\Big]$$
$$=-gL_1\cos q_1(\frac{1}{2}m_1+m_2)-\frac{1}{2}m_2g.L_2\cos(q_1+q_2)-gL_{30}(\frac{1}{2}m_3\cos q_6$$
$$+m_4\cos(q_6+\alpha))$$
$$-a(m_3g+m_4g+m_5g)-m_4g\frac{1}{2}.L_4\cos(q_3+q_4)-m_5g\left(b+\frac{1}{2}L_5\cos q_7\right)$$
$$+aR_{2y}+(a+b)R_{3y}$$

❖ لإيجاد معادلة التفاضلية للألة الناتجة عن دمج آلتي واط (II):

<u>**أولاً**</u>: بتطبيق نظرية الطاقة الحركية :

$$T_0(S)=U+\square \qquad (25)$$

تحسب بالشكل :

$$T_0(S)=T_0(OA)+T_0(AB)+T_0(CB)+T_0(DE)+T_0(GE)+T_0(IF)$$
$$+T_0(JH)+T_0(HK)+T_0(LK)+T_0(MN)$$
$$+T_0(PN) \qquad (26)$$

الآن لنحسب الطاقة الحركية للمجموعة المادي المتمثلة بالآلة الناتجة عن دمج آلتي واط (II) بوصلة ذات مفصلين.

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب OA :

الطاقة الحركية للقضيب OA الذي كتلته m_1 وطوله r_1 ويتحرك حركة دورانية حول المحور OZ والعمودي على مستوى الحركة تعطى بالشكل الآتي :

$$\Rightarrow T_0(OA) = \frac{1}{6} m_1 . r_1^2 . \dot{q_1}^2 \quad (27)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب AB:

الطاقة الحركية للقضيب AB الذي كتلته m_2 وطوله r_2 ويتحرك حركة عامة مستوية في المستوي OXY ولإيجاد طاقته الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية وبالتالي الطاقة الحركية تعطى بالشكل : :

$$T_0(AB) = \frac{1}{24} . m_2 . r_2^2 . \dot{q_2}^2 +$$

$$\frac{1}{2} . m_2 . \left[r_1^2 . \dot{q_1}^2 + \frac{1}{4} . r_2^2 . (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + r_1 . r_2 . \dot{q}_1 . (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) . \cos q_1 \right] \quad (28)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب CB:

الطاقة الحركية للقضيب CBالذي كتلته m_3وطوله r_{30} ويتحرك حركة دورانية حول المحور CZ والعمودي على مستوى الحركة تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(CB) = \frac{1}{2} . I_{cz} . \dot{q_{12}}^2 \Rightarrow T_0(CB) = \frac{1}{6} . m_3 . r_{30}^2 . \dot{q_{12}}^2 \quad (29)$$

حيث أن:

r_{30}هو الطول بين B و C

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب DE:

الطاقة الحركية للقضيبDEالذي كتلتهm_4 وطوله r_4 يتحرك حركة مستوية عامة في المستوي OXY، ولإيجاد طاقته الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية بالشكل :

$$T_0(DE) = T_{c_4}(DE) + T_0(c_4)$$

إن القضيب DEيتحرك دورانية حول المحور المار من مركز كتلته c_4 والعمودي على مستوي الحركة أي c_4z ،وبالتالي فإن :

$$T_{c_4}(DE) = \frac{1}{2}.I_{c_4z}.\dot{q_4}^2 \Rightarrow T_{c_4}(DE) = \frac{1}{24}.m_4.r_4^2.\dot{q_4}^2$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل c_4 للقضيب DEبالنسبة للمبدأ o فهي :

$$T_0(c_4) = \frac{1}{2}.m_4.v^2(c_4)$$

ومنه الطاقة الحركية $T_0(c_4)$ هي :

$$T_0(c_4) = \frac{1}{2}.m_4r_{30}^2.\dot{q_{12}}^2 + \frac{1}{4}.r_4^2.(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 + r_{30}.r_4.\dot{q}_{12}.(\dot{q}_3 + \dot{q}_4).cos(q_3 + q_4 - q_{12} - \alpha)$$

وبالتالي الطاقة الحركية للقضيب DEتعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(DE) = \frac{1}{24}.m_4.r_4^2.\dot{q_4}^2 + \frac{1}{2}.m_4.\left[r_{30}^2.\dot{q_{12}}^2 + \frac{1}{4}.r_4^2.(\dot{q}_3+\dot{q}_4)^2 + r_{30}.r_4.\dot{q}_{12}.(\dot{q}_3+\dot{q}_4).\cos(q_3+q_4-q_{12}-\alpha)\right] \quad (30)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب GE :

الطاقة الحركية للقضيب GE الذي كتلته m_5 وطوله r_5 ويتحرك حركة دورانية حول المحور Gz والعمودي على مستوى الحركة، تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(GE) = \frac{1}{2}.I_{Gz}.\dot{q_5}^2 \Rightarrow T_0(GE) = \frac{1}{6}m_5.r_5^2.\dot{q_5}^2 \quad (31)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب FI:

الطاقة الحركية للقضيبFIالذي كتلتهm_6وطوله r_6 يتحرك حركة مستوية عامة في المستوي OXY ولإيجاد طاقته الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية بالشكل :

$$T_0(FI) = T_{c_6}(FI) + T_0(c_6)$$

إن القضيب FI يتحرك دورانية حول المحور المار من مركز كتلته c_6 والعمودي على مستوي الحركة أي $c_6 z$ ، بالتالي فإن :

$$T_{c_6}(FI) = \frac{1}{2}.I_{c_6 z}.\dot{q_6}^2 \Rightarrow T_{c_6}(FI) = \frac{1}{24}.m_6.r_6^2.\dot{q_6}^2$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل c_6 للقضيب FI بالنسبة للمبدأ O فهي :

$$T_0(c_6) = \frac{1}{2}.m_6.v^2(c_6)$$
$$= \frac{1}{2}.m_6.\lambda^2.\dot{q_5}^2 + \frac{{r_6}^2}{4}(\dot{q_5} + \dot{q_6})^2 + \lambda r_6 \dot{q_5}(\dot{q_5} + \dot{q_6}) \cos q_6$$

حيث أن :

$$\overrightarrow{Oc_6} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{Fc_6}$$

$$\overrightarrow{Oc_6} = \left(a + b + \lambda \cos q_5 + \frac{r_6}{2} \cos(q_5 + q_6)\right)\vec{\imath} + \left(\lambda \sin q_5 + \frac{r_6}{2} \sin(q_5 + q_6)\right)\vec{\jmath} \ ,$$

$$b = \left|\overrightarrow{CG}\right|, \lambda = \left|\overrightarrow{GF}\right|$$

ومنه الطاقة الحركية للقضيب FI هي :

$$\mathrm{T_0(FI)} = \frac{1}{24}.\mathrm{m_6.r_6^2}.\dot{\mathrm{q}_6}^2 + \frac{1}{2}.\mathrm{m_6}.\left(\lambda^2.\dot{\mathrm{q}_5}^2 + \frac{\mathrm{r_6}^2}{4}(\dot{\mathrm{q}_5} + \dot{\mathrm{q}_6})^2 + \lambda \mathrm{r_6} \dot{\mathrm{q}_5}(\dot{\mathrm{q}_5} + \dot{\mathrm{q}_6}) \cos \mathrm{q_6}\right) \qquad (32)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب JH :

الطاقة الحركية للقضيب JH الذي كتلته m_7 وطوله r_7 ويتحرك حركة دورانية حول المحور JZ والعمودي على مستوى الحركة تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(JH) = \frac{1}{2}.I_{Jz}.\dot{q_7}^2 \Rightarrow T_0(JH) = \frac{1}{6}m_7.r_7^2.\dot{q_7}^2 \quad (33)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب HK:

الطاقة الحركية للقضيب HK الذي كتلتهm_8 وطوله r_8 ويتحرك حركة عامة في المستوي OXY،ولإيجاد طاقته الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية بالشكل :

$$T_0(HK) = T_{c_8}(HK) + T_0(c_8)$$

$$\Rightarrow T_{c_8}(HK) = \frac{1}{24}.m_8.r_8^2.\dot{q_8}^2$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل c_8 للقضيب HKبالنسبة للمبدأ o فهي :

$$\mathrm{T_0(c_8)}=\frac{1}{2}.\mathrm{m_8.v^2(c_8)}=\frac{1}{2}.\mathrm{m_8}.\left[\mathrm{r_7^2}.\dot{\mathrm{q}_7}^2+\frac{1}{4}.\mathrm{r_8^2}.(\dot{\mathrm{q}}_7+\dot{\mathrm{q}}_8)^2+\mathrm{r_7.r_8}.\dot{\mathrm{q}}_7.(\dot{\mathrm{q}}_7+\dot{\mathrm{q}}_8).\cos \mathrm{q_8}\right]$$

علماً أن :

$$\overrightarrow{Oc_8} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{Hc_8}$$

$$\overrightarrow{Oc_8} = \left(a + b + c + r_7 \cos q_7 + \frac{1}{2}.r_8 \cos(q_7 + q_8)\right)\vec{\imath} + \left(r_7 \sin q_7 + \frac{1}{2}.r_8 \sin(q_7 + q_8)\right)\vec{\jmath} \quad , c = \left|\overrightarrow{GJ}\right|$$

وبالتالي الطاقة الحركية للقضيب AB تعطى بالشكل الآتي :

$$\mathrm{T_0(HK)}=\frac{1}{24}.\mathrm{m_8.r_8^2}.\dot{\mathrm{q}_8}^2+ \frac{1}{2}.\mathrm{m_8}.\left[\mathrm{r_7^2}.\dot{\mathrm{q}_7}^2+\frac{1}{4}.\mathrm{r_8^2}.(\dot{\mathrm{q}}_7+\dot{\mathrm{q}}_8)^2+\mathrm{r_7.r_8}.\dot{\mathrm{q}}_7.(\dot{\mathrm{q}}_7+\dot{\mathrm{q}}_8).\cos \mathrm{q_8}\right] \quad (34)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب LK :

الطاقة الحركية للقضيب LK الذي كتلته m_9 وطوله r_{90} ويتحرك حركة دورانية حول المحور LZ والعمودي على مستوى الحركة تعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(LK) = \frac{1}{2}.I_{Lz}.\dot{q_9}^2 \Rightarrow T_0(LK) = \frac{1}{6}m_9.r_{90}^2.\dot{q_9}^2 \quad (35)$$

حيث أن: r_{90}هو الطول بين L و K

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب MN:

الطاقة الحركية للقضيبMNالذي كتلتهm_{10}وطوله r_{10} يتحرك حركة مستوية عامة في المستوي OXY ،ولإيجاد طاقته الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية بالشكل :

$$T_0(MN) = T_{c_{10}}(MN) + T_0(c_{10})$$

إن القضيب MNيتحرك دورانية حول المحور المار من مركز كتلته c_{10} والعمودي على مستوي الحركة أي $c_{10}z$ بالتالي فإن :

$$T_{c_{10}}(MN) = \frac{1}{2}.I_{c_{10}z}.\dot{q_{10}}^2 \Rightarrow T_{c_{10}}(MN) = \frac{1}{24}.m_{10}.r_{10}^2.\dot{q_{10}}^2$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل c_{10} للقضيب MNبالنسبة للمبدأ o فهي :

$$T_0(c_{10}) = \frac{1}{2}.m_{10}.v^2(c_{10})$$

وهنا استخدمنا العلاقة:

$$\overrightarrow{Oc_{10}} = \left(a + b + c + d + r_{90}\cos(q_9 + \gamma) + \frac{1}{2}.r_{10}\cos(q_{15} + q_{10})\right)\vec{i}$$
$$+ \left(r_{90}\sin(q_9 + \gamma) + \frac{1}{2}.r_{10}\sin(q_{15} + q_{10})\right)\vec{j} \quad ,d = \left|\overrightarrow{JL}\right|$$

ومنه الطاقة الحركية $T_0(c_{10})$ هي :

$$T_0(c_{10}) = \frac{1}{2}.m_{10}.\left[r_{90}^2.\dot{q_9}^2 + \frac{1}{4}.r_{10}^2.(\dot{q}_{15} + \dot{q}_{10})^2 + r_{90}.r_{10}.\dot{q}_9.(\dot{q}_{15} + \dot{q}_{10}).cos(q_{15} + q_{10} - q_9 - \gamma)\right]$$

وبالتالي الطاقة الحركية للقضيب DEتعطى بالشكل الآتي :

$$T_0(MN) = \frac{1}{24}.m_{10}.r_{10}^2.\dot{q_{10}}^2 + \frac{1}{2}.m_{10}.\left[r_{90}^2.\dot{q_9}^2 + \frac{1}{4}.r_{10}^2.(\dot{q}_{15} + \dot{q}_{10})^2 + r_{90}.r_{10}.\dot{q}_9.(\dot{q}_{15} + \dot{q}_{10}).cos(q_{15} + q_{10} - q_9 - \gamma)\right] \quad (36)$$

❖ حساب الطاقة الحركية للقضيب PN :

الطاقة الحركية للقضيبPN الذي كتلته m_{11} وطوله r_{11} ويتحرك حركة دورانية حول المحور PZ والعمودي على مستوى الحركة تعطى بالشكل الآتي :

$$\Rightarrow T_0(PN) = \frac{1}{6}m_{11}.r_{11}^2.\dot{q_{16}}^2 \quad (37)$$

نعوض(37)، (36),(35),(34),(33),(32),(31),(30),(29),(28),(27) اِفي (26) نجد ما يلي :

$$T_0(s) = \frac{1}{6}(m_1.r_1^2.\dot{q_1}^2 + m_3.r_{30}^2.\dot{q_{12}}^2 + m_5.r_5^2.\dot{q_5}^2 + m_7.r_7^2.\dot{q_7}^2 + m_9.r_{90}^2.\dot{q_9}^2 + m_{11}.r_{11}^2.\dot{q_{16}}^2) +$$

$$\frac{1}{2}(m_2.r_1^2.\dot{q_1}^2 + m_2 r_1.r_2.\dot{q}_1.(\dot{q}_1 + \dot{q}_2).\cos q_1 + m_4 r_{30}^2.\dot{q_{12}}^2 + m_4.r_{30}.r_4.\dot{q}_{12}.(\dot{q}_3 + \dot{q}_4).\cos(q_3 + q_4$$

$$m_{10} r_{90}^2.\dot{q_9}^2 + m_{10}.r_{90}.r_{10}.\dot{q}_9.(\dot{q}_{15} + \dot{q}_{10}).\cos(q_{15} + q_{10} q_9 - \gamma)) +$$

$$\frac{1}{8}(m_2.r_2^2.(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_4.r_4^2.(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 + m_6.r_6{}^2.(\dot{q_5} + \dot{q_6})^2 + m_8.r_8^2.(\dot{q}_7 + \dot{q}_8)^2 + m_{10}.r_{10}^2.(\dot{q}_{15} + q$$

$$\frac{1}{24}(m_2.r_2^2.\dot{q_2}^2+m_4.r_4^2.\dot{q_4}^2+m_6.r_6^2.\dot{q_6}^2+m_8.r_8^2.\dot{q_8}^2+m_{10}.r_{10}^2.\dot{q_{10}}^2)$$

لنحسب الآن أعمال القوى الخارجية المؤثرة بالجملة و التي تمثل بقوى الثقل للقضبان المكونة لهذه الآلة ،إضافةً إلى قوى ردود الأفعال في المفاصل الثابتة .

- $\overrightarrow{P_1}$ هي قوة ثقل القضيب OA وبالتالي عملها يساوي :

$$U(\overrightarrow{P_1}) = -\frac{1}{2}m_1 g r_1 \sin q_1 \quad (39)$$

- $\overrightarrow{P_2}$ هي قوة ثقل القضيب AB وبالتالي عملها يساوي :

$$U(\overrightarrow{P_2}) = -m_2 g(r_1 \sin q_1 + \frac{r_2}{2}\sin(q_1 + q_2)) \quad (40)$$

- $\overrightarrow{P_3}$ هي قوة ثقل القضيب CB وبالتالي عملها يعطى بالشكل:

$$U(\overrightarrow{P_3}) = \int \overrightarrow{P_3}.d\overrightarrow{Oc_3} \Rightarrow U(\overrightarrow{P_3}) = -\frac{1}{2}m_3 g r_{30} \sin q_{12} \quad (41)$$

- $\overrightarrow{P_4}$ هي قوة ثقل القضيب DEتحسب كما يلي:

$$U(\overrightarrow{P_4})=\int \overrightarrow{P_4}.d\overrightarrow{Oc_4}\Rightarrow U(\overrightarrow{P_4})=-m_4 g\left(r_{30}\sin(q_{12}+\alpha)+\frac{1}{2}.r_4\sin(q_3+q_4)\right) \quad (42)$$

- $\overrightarrow{P_5}$ هي قوة ثقل القضيب GEوبالتالي فأن عملها يساوي:

$$U(\overrightarrow{P_5}) = \int \overrightarrow{P_5}.d\overrightarrow{Oc_5}$$
$$= \int -m_5 g\vec{j}.d\left(\left(a+b+\frac{1}{2}r_5\cos q_5\right)\vec{i}+\frac{1}{2}r_5\sin q_5\,\vec{j}\right)$$
$$\Rightarrow U(\overrightarrow{P_5}) = -\frac{1}{2}m_5 g r_5 \sin q_5 \quad (43)$$

- $\overrightarrow{P_6}$ هي قوة ثقل القضيب FIوبالتالي فأن عملها يعطى بالشكل:

$$U(\overrightarrow{P_6}) = \int \overrightarrow{P_6}.\, d\overrightarrow{Oc_6} \Rightarrow U(\overrightarrow{P_6})$$
$$= -m_6 g\left(\lambda \sin q_5 + \frac{r_6}{2} \sin(q_5 + q_6)\right) \quad (44)$$

- $\overrightarrow{P_7}$ هي قوة ثقل القضيب JH وبالتالي فأن عملها يعطى بالشكل:

$$U(\overrightarrow{P_7})=\int \overrightarrow{P_7}.d\overrightarrow{Oc_7},\overrightarrow{Oc_7}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{Jc_7}=\left(a+b+c+\frac{r_7}{2}\cos q_7\right)\vec{i}+\frac{r_7}{2}\sin q_7\,\vec{j}$$

بالتالي فأن:

$$U(\overrightarrow{P_7}) = -m_7 g\left(\frac{r_7}{2} \sin q_7\right) \quad (45)$$

- $\overrightarrow{P_8}$ هي قوة ثقل القضيب HK تحسب:

$$U(\overrightarrow{P_8}) = \int \overrightarrow{P_8}.\, d\overrightarrow{Oc_8} \Rightarrow U(\overrightarrow{P_8})$$
$$= -m_8 g\left(r_7 \sin q_7 + \frac{1}{2}.\, r_8 \sin(q_7 + q_8)\right) \quad (46)$$

- $\overrightarrow{P_9}$ هي قوة ثقل القضيب LK تحسب بالشكل :

$$U(\overrightarrow{P_9}) = \int \overrightarrow{P_9}.\, d\overrightarrow{Oc_9}, \overrightarrow{Oc_9} = \left(a + b + c + d + \frac{r_{90}}{2} \cos q_9\right)\vec{i} + \frac{r_{90}}{2} \sin q_9\,\vec{j}$$

ومنه:

$$U(\overrightarrow{P_9}) = -m_9 g\left(\frac{r_{90}}{2} \sin q_9\right) (47)$$

- $\overrightarrow{P_{10}}$ هي قوة ثقل القضيب MN وبالتالي فأن عملها يعطى بالشكل:

$$U(\overrightarrow{P_{10}})=\int \overrightarrow{P_{10}}.d\overrightarrow{Oc_{10}}\Rightarrow U(\overrightarrow{P_{10}})=-m_{10}g\left(r_{90}\sin(q_9+\gamma)+\frac{1}{2}.r_{10}\sin(q_{15}+q_{10})\right) \quad (48)$$

- $\overrightarrow{P_{11}}$ هي قوة ثقل القضيب PN وبالتالي فأن عملها يعطى بالشكل :

$$U(\overrightarrow{P_{11}}) = \int \overrightarrow{P_{11}}.d\overrightarrow{Oc_{11}} \Rightarrow U(\overrightarrow{P_{11}}) = -m_{11}g\left(\frac{r_{11}}{2} sin\, q_{16}\right) \quad (49)$$

حيث أن:

$$\overrightarrow{Oc_{11}}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JL}+\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{Pc_{11}}=\left(a+b+c+d+e+\frac{r_{11}}{2}\cos q_{16}\right)\vec{i}+\frac{r_{11}}{2}\sin q_{16}\,\vec{j}$$

أما عمل قوى ردود الفعل في المفاصل الثابتة والتي هي $O, C, G\ ,\ J, L\ , P$ فهو معدوم وذلك لأن نقطة تأثيرها لهذه القوى ثابتة، فالانتقال الذي تسببه معدوم ، ومنه نجد :

$$U(\overrightarrow{R_1}) = U(\overrightarrow{R_2}) = U(\overrightarrow{R_3}) = U(\overrightarrow{R_4}) = U(\overrightarrow{R_5}) = U(\overrightarrow{R_6}) = \vec{0} \quad (50)$$

مما سبق نجد أن العمل الحاصل للقوى الخارجية المؤثرة في هذه الآلة يعطى بالشكل:

$$U = \sum_{i=1}^{11} U(\overrightarrow{P_\iota}) + \sum_{i=1}^{6} U(\overrightarrow{R_\iota}) \quad (51)$$

ومنه نجد أن:

$$U=-gr_1 \sin q_1 \left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)-gr_{30}\left(\frac{1}{2}m_3 \sin q_{12} +m_4 \sin(q_{12}+\alpha) \right)-\frac{1}{2}gm_2 r_2 \sin (q_1+q_2)-\frac{1}{2}gm_4$$

$$gr_{90}\left(\frac{1}{2}m_9 \sin q_9 +m_{10} \sin (q_9+\gamma)\right)-\frac{1}{2}gm_{10}.r_{10} \sin (q_{15}+q_{10})-\frac{r_{11}}{2}gm_{11} \sin q_{16}$$

وبالتالي المعادلة التفاضلية للآلة الناتجة عن دمج آلتي واط **(II)** تعطى بالشكل :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6}(m_1.r_1^2.\dot{q_1}^2+m_3.r_{30}^2.\dot{q_{12}}^2+m_5.r_5^2.\dot{q_5}^2+m_7.r_7^2.\dot{q_7}^2+m_9.r_{90}^2.\dot{q_9}^2\\
&\quad+m_{11}.r_{11}^2.\dot{q_{16}}^2)+\frac{1}{2}(m_2.r_1^2.\dot{q_1}^2+m_2r_1.r_2.\dot{q}_1.(\dot{q}_1\\
&\quad+\dot{q}_2).\cos q_1+m_4r_{30}^2.\dot{q_{12}}^2+m_4.r_{30}.r_4.\dot{q}_{12}.(\dot{q}_3\\
&\quad+\dot{q}_4).\cos(q_3+q_4-q_{12}-\alpha)+m_6\lambda^2.\dot{q_5}^2+m_6\lambda r_6\dot{q_5}(\dot{q_5}\\
&\quad+\dot{q_6})\cos q_6+m_8.r_7^2.\dot{q_7}^2+m_8.r_7.r_8.\dot{q}_7.(\dot{q}_7+\dot{q}_8).\cos q_8\\
&\quad+m_{10}r_{90}^2.\dot{q_9}^2+m_{10}.r_{90}.r_{10}.\dot{q}_9.(\dot{q}_{15}+\dot{q}_{10}).\cos(q_{15}+q_{10}\\
&\quad-q_9-\gamma))+\frac{1}{8}(m_2.r_2^2.(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2+m_4.r_4^2.(\dot{q}_3+\dot{q}_4)^2\\
&\quad+m_6.r_6{}^2.(\dot{q_5}+\dot{q_6})^2+m_8.r_8^2.(\dot{q}_7+\dot{q}_8)^2+m_{10}.r_{10}^2.(\dot{q}_{15}\\
&\quad+\dot{q}_{10})^2)+\frac{1}{24}(m_2.r_2^2.\dot{q_2}^2+m_4.r_4^2.\dot{q_4}^2+m_6.r_6^2.\dot{q_6}^2\\
&\quad+m_8.r_8^2.\dot{q_8}^2+m_{10}.r_{10}^2.\dot{q_{10}}^2)\\
&\quad=-gr_1\sin q_1\,(\frac{1}{2}m_1+m_2)-gr_{30}(\frac{1}{2}m_3\sin q_{12}\\
&\quad+m_4\sin(q_{12}+\alpha))-\frac{1}{2}gm_2r_2\sin(q_1+q_2)\\
&\quad-\frac{1}{2}gm_4r_4\sin(q_3+q_4)-\frac{1}{2}gm_5L_5\sin q_5\\
&\quad-m_6g\left(\lambda\sin q_5+\frac{r_6}{2}\sin(q_5+q_6)\right)-gr_7\sin q_7\,(\frac{1}{2}m_7\\
&\quad+m_8)-\frac{1}{2}m_8g.r_8\sin(q_7+q_8)+gr_{90}(\frac{1}{2}m_9\sin q_9\\
&\quad+m_{10}\sin(q_9+\gamma))-\frac{1}{2}gm_{10}.r_{10}\sin(q_{15}+q_{10})\\
&\quad-\frac{r_{11}}{2}gm_{11}\sin q_{16}+h
\end{aligned}
$$

<u>ثانياً</u>: نطبق نظرية العزم الحركي بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_o}(s)=\sum_{i=1}^{11}\underset{o}{\overrightarrow{Mom}}(\overrightarrow{P_\iota})+\sum_{i=1}^{6}\underset{o}{\overrightarrow{Mom}}(\overrightarrow{R_\iota})\quad(52)$$

لنبدأ بحساب العزم الحركي للمجموعة المادية المتمثلة بالآلة الناتجة عن دمج آلتي **(II)**، بوصلة ذات مفصلين، وذلك بحساب العزم الحركي لكل قضيب من قضبان هذه الآلة، على النحو التالي :

- العزم الحركي للقضيب OA:

الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة وبالتالي :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(OA) = I_{OZ}\dot{q_1}\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(OA) = \frac{1}{3}.m_1 r_1^2 \dot{q_1}\vec{k} \quad (53)$$

- العزم الحركي للقضيب AB:

الذي يتحرك حركة عامة في المستوي OXY ،يعطى بحسب نظرية كونيغ الأولى بالشكل :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(AB) = \left(\frac{1}{12}m_2 r_2^2 \dot{q_2} + \frac{r_2^2}{4}m_2(\dot{q_1} + \dot{q_2}) + \frac{r_1 r_2}{2}m_2(2\dot{q_1} + \dot{q_2})\cos q_2\right)\vec{k} \quad (54)$$

- العزم الحركي للقضيب CB:

العزم الحركي للقضيب CB الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة وبالتالي:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(CB) = I_{CZ}\dot{q}_{12}\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(CB) = \frac{1}{3}m_3 r_{30}^2 \dot{q}_{12}\vec{k} \quad (55)$$

- العزم الحركي للقضيب DE:

العزم الحركي للقضيب DE الذي حركته عامة في المستوي وبالتالي نطبق نظرية كونيغ الأولى نجد:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(DE)=\Big[\frac{1}{12}m_4r_4^2\dot{q_4}+a\left(m_4r_{30}\dot{q_{12}}\cos(q_{12}+\alpha)+m_4\frac{r_4}{2}(\dot{q_3}+\dot{q_4})\cos(q_3+q_4)\right)$$

$$+m_4r_{30}^2.\dot{q_{12}}+\frac{r_4^2}{4}m_4(\dot{q_3}+\dot{q_4})+\frac{r_{30}r_4}{2}m_4(\dot{q_3}+\dot{q_4}+\dot{q_{12}})\cos(q_3+q_4-q_{12}-\alpha)\Big]\vec{k} \quad (56)$$

❖ العزم الحركي للقضيب GE:

العزم الحركي للقضيب GE الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركةOXY يعطى بالشكل:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(GE)=I_{GZ}\dot{q_5}\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{\sigma_o}(GE)=\frac{1}{3}.m_5r_5^2\dot{q_5}\vec{k} \quad (57)$$

❖ العزم الحركي للقضيب FI:

أما العزم الحركي للقضيب FI الذي حركته المستوية عامة في المستوي OXY يعطى بالشكل:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(FI)=\overrightarrow{\sigma_{c_6}}(FI)+\overrightarrow{\sigma_o}(c_6)=I_{c_6Z}\dot{q_6}\vec{k}+\overrightarrow{Oc_6}\wedge m_6\vec{V}(c_6)$$

$$\overrightarrow{\sigma_o}(FI)=\Big[\frac{1}{12}m_6r_6^2\dot{q_6}$$

$$+(a+b)\left(m_6\lambda\dot{q_5}\cos(q_5)+m_6\frac{r_6}{2}(\dot{q_5}+\dot{q_6})\cos(q_5+q_6)\right)$$

$$+m_6\lambda^2.\dot{q_5}+\frac{r_6^2}{4}m_6(\dot{q_5}+\dot{q_6})+\frac{\lambda r_6}{2}m_6(2\dot{q_5}+\dot{q_6})\cos(q_6)\Big]\vec{k} \quad (58)$$

❖ العزم الحركي للقضيب JH:

العزم الحركي للقضيب JH الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة OXY يعطى بـ :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(JH)=I_{JZ}\dot{q_7}\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{\sigma_o}(JH)=\frac{1}{3}.m_7r_7^2\dot{q_7}\vec{k} \quad (59)$$

❖ العزم الحركي للقضيب HK:

العزم الحركي للقضيب DE الذي حركته عامة في المستوي OXY يُحسب بتطبيق نطبق نظرية كونيغ الأولى بالشكل:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(Hk) = \overrightarrow{\sigma_{c_8}}(HK) + \overrightarrow{\sigma_o}(c_8) = I_{c_8Z}\dot{q_8}\vec{k} + \overrightarrow{Oc_8} \wedge m_8\vec{V}(c_8)$$

$$\overrightarrow{\sigma_o}(HK)=\Big[\frac{1}{12}m_8r_8^2\dot{q_8}+(a+b+c)\Big(m_8r_7\dot{q_7}\cos(q_7)+m_8\frac{r_8}{2}(\dot{q_7}+\dot{q_8})\cos(q_7+q_8)\Big)+ m_8r_7^2.\dot{q_7}+\frac{r_8^2}{4}m_8(\dot{q_7}+\dot{q_8})+\frac{r_7r_8}{2}m_8(2\dot{q_7}+\dot{q_8})\cos(q_8)\Big]\vec{k} \quad (60)$$

❖ العزم الحركي للقضيب LK:

العزم الحركي للقضيب LK الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة OXY يعطى بـ :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(LK) = I_{LZ}\dot{q_9}\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(LK) = \frac{1}{3}.m_9r_{90}^2\dot{q_9}\vec{k}(61)$$

❖ العزم الحركي للقضيبMN:

العزم الحركي للقضيب MN الذي حركته عامة في المستويOXY، لحسابه نطبق نظرية كونيغ الأولى ؛ نجد:

$$\overrightarrow{\sigma_o}(MN)=\overrightarrow{\sigma_{c_{10}}}(MN)+\overrightarrow{\sigma_o}(c_{10})=I_{c_{10}Z}\dot{q}_{10}\vec{k}+\overrightarrow{Oc_{10}}\wedge m_{10}\vec{V}(c_{10})$$

$$\overrightarrow{\sigma_o}(MN) = \Big[\frac{1}{12} m_{10} r_{10}^2 \dot{q_{10}} + (a+b+c+d)\Big(m_{10} r_{90} \dot{q_9} \cos(q_9+\gamma) + m_{10}\frac{r_{10}}{2}(\dot{q_{15}}+\dot{q_{10}})\cos(q_{15}+q_{10})\Big) + m_{10} r_{90}^2 . \dot{q_9} + \frac{r_{10}^2}{4} m_{10}(\dot{q_{15}}+\dot{q_{10}}) + \frac{r_{90} r_{10}}{2} m_8 (\dot{q_9}+\dot{q_{15}}+\dot{q_{10}})\cos(q_9+\gamma-q_{15}-q_{10})\Big]\vec{k} \quad (62)$$

❖ العزم الحركي للقضيبPN:

العزم الحركي للقضيب PN الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة OXY يعطى بـ :

$$\overrightarrow{\sigma_o}(PN) = I_{PZ} \dot{q_{16}} \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(PN) = \frac{1}{3} . m_{11} r_{11}^2 \dot{q_{16}} \vec{k} \quad (63)$$

ولنحسب الآن عزوم القوى الخارجية المؤثرة في هذه الآلة و التي تمثل بقوى الثقل للقضبان المكونة لهذه الآلة بالإضافة على قوى ردود الأفعال في المفاصل O,C,G,J,L,P:

1. حساب عزوم قوى ثقل القضبان :

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_1}$التي هي قوة ثقل القضيب OA وتعطى بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_1}) = \overrightarrow{Oc_1} \wedge \overrightarrow{P_1} = -\frac{r_1}{2} m_1 g \cos q_1 \vec{k} \quad (64)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_2}$التي هي قوة ثقل القضيب AB ويعطى بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_2}) = \overrightarrow{Oc_2} \wedge \overrightarrow{P_2} = -m_2 g\left(r_1 \cos q_1 + \frac{1}{2} . r_2 \cos(q_1+q_2)\right)\vec{k} \quad (65)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_3}$التي هي قوة ثقل القضيب CB تحسب بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_3}) = \overrightarrow{Oc_3} \wedge \overrightarrow{P_3} = -m_3 g\left(a + \frac{r_{30}}{2} cos\, q_{12}\right)\vec{k} \quad (66)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_4}$ التي هي قوة ثقل القضيب DE يعطى بـ:

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_4}) = \overrightarrow{Oc_4} \wedge \overrightarrow{P_4} = -m_4 g\left(a + r_{30} \cos(q_{12} + \alpha) + \frac{1}{2}.r_4 \cos(q_3 + q_4)\right)\vec{k} \quad (67)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_5}$ التي هي قوة ثقل القضيب GF، ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_5}) = \overrightarrow{Oc_5} \wedge \overrightarrow{P_5} = -m_5 g\left(a + b + \frac{1}{2} r_5\, cos\, q_5\right)\vec{k} \quad (68)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_6}$ التي هي قوة ثقل القضيب FI، ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_6}) = \overrightarrow{Oc_6} \wedge \overrightarrow{P_6}$$

$$= -m_6 g\left(a + b + \lambda\, cos\, q_5 + \frac{r_6}{2} cos(q_5 + q_6)\right)\vec{k} \quad (69)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_7}$ التي هي قوة ثقل القضيبJH ،ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_7}) = \overrightarrow{Oc_7} \wedge \overrightarrow{P_7} = -m_7 g\left(a + b + c + \frac{r_7}{2} cos\, q_7\right)\vec{k} \quad (70)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_8}$ التي هي قوة ثقل القضيبHK ،ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_8}) = \overrightarrow{Oc_8} \wedge \overrightarrow{P_8}$$

$$- m_8 g\left(a + b + c + r_7\, cos\, q_7 + \frac{1}{2}.r_8\, cos(q_7 + q_8)\right)\vec{k} (71)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_9}$التي هي قوة ثقل القضيبLk ،ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_9}) = \overrightarrow{Oc_9} \wedge \overrightarrow{P_9} = -m_9 g\left(a + b + c + d + \frac{r_{90}}{2} cos\, q_9\right)\vec{k} \quad (72)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_{10}}$التي هي قوة ثقل القضيب MN، ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{\mathrm{Mom}}}(\overrightarrow{P_{10}})=\overrightarrow{Oc_{10}}\wedge\overrightarrow{P_{10}}=-m_{10}g\left(a+b+c+d+r_{90}\cos(q_9+\gamma)+\frac{1}{2}.r_{10}\cos(q_{15}+q_{10})\right)\vec{K}$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{P_{11}}$التي هي قوة ثقل القضيب PN، ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{Mom}}(\overrightarrow{P_{11}}) = \overrightarrow{Oc_{11}} \wedge \overrightarrow{P_{11}}$$

$$= -m_{11}g\left(a+b+c+d+e+\frac{r_{11}}{2}cos\,q_{16}\right)\vec{k} \quad (74)$$

حساب عزوم قوى ردود الأفعال :

❖ عزم القوة $\overrightarrow{R_1}$وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت O وعزمها يساوي الصفر لأن نقطة تأثير هذه القوة تنطبق على مركز العزم O بالتالي نجد أن :

$$\overrightarrow{\underset{o}{\mathrm{Mom}}}(\overrightarrow{R_1}) = 0(75)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{R_2}$وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت Cويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{\mathrm{Mom}}}(\overrightarrow{R_2}) = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{R_2} = aR_{2y}\vec{k} \quad (76)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{R_3}$ وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت G و dحسب بالشكل :

$$\overrightarrow{\underset{o}{\mathrm{Mom}}}(\overrightarrow{R_3}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R_3} = (a+b)R_{3y}\vec{k} \quad (77)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{R_4}$ وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابتJ بالنسبة للمبدأ O :

$$\overrightarrow{\underset{o}{\mathrm{Mom}}}(\overrightarrow{R_4}) = \overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{R_4} = (a+b+c)R_{4y}\vec{k} \quad (78)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{R_5}$ وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت L ويساوي :

$$\overrightarrow{\underset{o}{\mathrm{Mom}}}(\overrightarrow{R_5}) = \overrightarrow{OL} \wedge \overrightarrow{R_5} = (a+b+c+d)R_{5y}\vec{k} \quad (79)$$

❖ عزم القوة $\overrightarrow{R_6}$ وهي قوة رد الفعل في المفصل الثابت P ويساوي :

$$\underset{o}{\overrightarrow{\mathrm{Mom}}}(\overrightarrow{R_6}) = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R_6} = (a + b + c + d + e)R_{6y}\vec{k} \quad (80)$$

ومنه المعادلة التفاضلية للآلة الناتجة عن دمج آلتي واط (II) باستخدام نظرية العزم الحركي تعطى بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(r_1 r_2 m_2(2\dot{q_1} + \dot{q_2}) \cos q_2 + a m_4 r_4(\dot{q_3} + \dot{q_4}) \cos(q_3 + q_4)\\
+ r_{30} r_4 m_4(\dot{q_3} + \dot{q_4} + \dot{q_{12}}) \cos(q_3 + q_4 - q_{12} - \alpha)\\
+ (a + b) m_6 r_6(\dot{q_5} + \dot{q_6}) \cos(q_5 + q_6)\\
+ \frac{\lambda r_6}{2} m_6(2\dot{q_5} + \dot{q_6}) \cos(q_6)\\
+ (a + b + c) m_8 r_8(\dot{q_7} + \dot{q_8}) \cos(q_7 + q_8)\\
+ r_7 r_8 m_8(2\dot{q_7} + \dot{q_8}) \cos(q_8)\\
+ (a + b + c + d) m_{10} r_{10}(\dot{q_{15}} + \dot{q_{10}}) \cos(q_{15} + q_{10})\\
+ r_{90} r_{10} m_8(\dot{q_9} + \dot{q_{15}} + \dot{q_{10}}) \cos(q_9 + \gamma - q_{15} - q_{10}))\\
+ \frac{1}{3}(m_1 r_1^2 \dot{q_1} + m_3 r_{30}^2 \dot{q_{12}} + m_5 r_5^2 \dot{q_5} + m_7 r_7^2 \dot{q_7} + m_9 r_{90}^2 \dot{q_9}\\
+ m_{11} r_{11}^2 \dot{q_{16}}) + \frac{1}{4}(r_2^2 m_2(\dot{q_1} + \dot{q_2}) + r_4^2 m_4(\dot{q_3} + \dot{q_4})\\
+ r_6^2 m_6(\dot{q_5} + \dot{q_6}) + r_8^2 m_8(\dot{q_7} + \dot{q_8}) + r_{10}^2 m_{10}(\dot{q_{15}} + \dot{q_{10}}))\\
+ \frac{1}{12}(m_2 r_2^2 \dot{q_2} + m_4 r_4^2 \dot{q_4} + m_6 r_6^2 \dot{q_6} + m_8 r_8^2 \dot{q_8} + m_{10} r_{10}^2 \dot{q_{10}})\\
+ a m_4 r_{30} \dot{q_{12}} \cos(q_{12} + \alpha) + m_4 L_{30}^2 . \dot{q_{12}}\\
+ (a + b) m_6 \lambda \dot{q_5} \cos(q_5) + m_6 \lambda^2 . \dot{q_5}\\
+ (a + b + c) m_8 r_7 \dot{q_7} \cos(q_7) + m_8 r_7^2 . \dot{q_7}\\
+ (a + b + c + d) m_{10} r_{90} \dot{q_9} \cos(q_9 + \gamma) + m_{10} r_{90}^2 . \dot{q_9}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}m_1 g r_1 \cos q_1 - m_2 g r_1 \cos q_1 - \frac{1}{2}m_2 g.r_2 \cos(q_1 + q_2)$$
$$- g r_{30}(\frac{1}{2}m_3 \cos q_{12} + m_4 \cos(q_{12} + \alpha)) - a(m_3 g + m_4 g$$
$$+ m_5 g + m_6 g + m_7 g + m_8 g + m_9 g + m_{10} g + m_{11} g)$$
$$- m_4 g \frac{1}{2}.r_4 \cos(q_3 + q_4) - m_5 g \frac{1}{2} r_5 \cos q_5$$
$$- b(m_5 g + m_6 g + m_7 g + m_8 g + m_9 g + m_{10} g + m_{11} g)$$
$$- m_6 g(\lambda \cos q_5 + \frac{r_6}{2}\cos(q_5 + q_6)) - c(m_7 g + m_8 g + m_9 g$$
$$+ m_{10} g + m_{11} g) - m_7 g \frac{r_7}{2}\cos q_7 - m_8 g(r_7 \cos q_7$$
$$+ \frac{1}{2}.r_8 \cos(q_7 + q_8)) - d(m_9 g + m_{10} g) - m_9 g \frac{r_{90}}{2}\cos q_9$$
$$- m_{10} g(r_{90} \cos(q_9 + \gamma) + \frac{1}{2}.r_{10} \cos(q_{15} + q_{10})) - e(m_{11} g)$$
$$- m_{11} g \frac{r_{11}}{2}\cos q_{16} + a(R_{2y} + R_{3y} + R_{4y} + R_{5y} + R_{6y})$$
$$+ b(R_{3y} + R_{4y} + R_{5y} + R_{6y}) + c(R_{4y} + R_{5y} + R_{6y}) + d(R_{5y}$$
$$+ R_{6y}) + eR_{6y}$$

النتائج والمقترحات :

تم الحصول على المعادلة التفاضلية لآلة واط **(II)** وللآلة الناتجة عن دمج آلتي واط **(II)** بطريقتين(نظرية الطاقة الحركية ونظرية العزم الحركي).

وفي النهاية نقترح إجراء الدراسة السابقة على كل من:

–الآلتين واط و واط من النوع **(I)**

–والآلة الناتجة عن دمج آلتي من النوع **(I)** بمفاصل مرنة .

المراجع العلمية :

[1] _إطروحة ، دكتوراه ، مصطفى حسن , جامعة صوفيا، 2006

[2]_ مصطفى حسن ، خالد العلي الطعيمة , "دراسة حول دمج الآلتين الرباعية و التساعية", جامعة البعث ,2021

[3]_ Howell, L.L compliant Mechanisms, New York-Chichester-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto, John Wiley& Sons, Inc., 2001.

[4]_ Lobontiu, N. Compliant Mechanisms. Design of Flexural Hinges, CRC Press, Boca Raton-London-New York-Washington.D.C,2002.

[5]_"Ch Mechanism" November2007,

[6]_ Hamid Mehdig holi and Saad " Optimization of Watt's Six-bar Linkage to

Generate Straight and Parallel Leg "University of technology December, motion

2008 ،7.p

[7]_ M.Plecnik_J.M.McCarth," Numerical Synthesis of Six-bar Linkag es for Mechanical Computation" 2012 ,23.p

[8]_ J.Michael McCarthy _ J.Reinkensmeyer, "The Kinematic Design of Six-bar Linkages Using Polynomial Homotopy Continuation", University of California, 2015 ,319.p