# بنـــــى جــزئيــــة جـــديـــــدة في المـــودول الثنــــــائـــي

حمزة حاكمي[1] معن خليف[2]

**المــــــلخص**

لما كان للمودولات الجزئية لمودول ما، دور مهم في تحديد طبيعة المودول وأيضاً في تحديد طبيعة حلقة الإندومورفيزمات لهذا المودول. لأجل ذلك، في هذه المقالة عرفنا مجموعات جزئية جديدة في المودول الثنائي$[M,N]$، حيث $M,N$ مودولان فوق حلقة $R$، وهي:

$$\Delta_M[M,N],\quad \Delta_N[M,N],\quad \nabla_M[M,N],\quad \nabla_N[M,N]$$

وقد أثبتنا أن هذه المجموعات الجزئية تشكل مودولات جزئية من المودول$[M,N]$. ودرسنا علاقتها بكل من $J[M,N]$ و $\mathrm{Tot}[M,N]$.

وقد تبين لنا أنه لأجل المودول نصف الإسقاطي وشبه الجامد $N$ فإن:

$$\mathrm{Tot}[M,N]=\nabla_N[M,N]$$

وذلك لأجل أي مودول آخر $M$. وأنه لأجل المودول نصف الإسقاطي وشبه الجامد $M$ فإن:

$$\mathrm{Tot}[M,N]=\nabla_M[M,N]$$

وذلك لأجل أي مودول آخر $N$. فضلاً عن ذلك، تبين لنا أنه إذا كان المودول $M$ هو $N$ –نصف أفقي، فإن الشرطين الآتيين متكافئان:

1 – لأجل كل عنصر $\alpha\in[M,N]$ بحيث $\alpha\notin\Delta_M[M,N]$ فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ محتوى في حد مباشر $K\neq M$ للمودول $M$.

2 – المودول$[M,N]$ شبه جامد وأن $J[M,N]=\Delta_M[M,N]$.

**الكلمات المفتاحية:** المودول الثنائي، المودول الثنائي شبه الجامد، أساس المودول، المودول نصف الإسقاطي (نصف الأفقي).

**التصنيف الرياضياتي العالمي للعام 2020.** 16D90, 16D40, 16N20, 16E50.

[1] أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[2] طالب دراسات عليا قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

# A New Substructures in Bi-Modules

Hamza Hakmi[1]　　　　Maen Khlief[2]

**Abstract**

When the submodules of some module, have an important role in certain the kind of the module, also in certain the kind of it's endomorphism ring. For that in this paper, we introduced new subsets of bi-module $[M,N]$, where $M,N$ are modules over a ring $R$, this subsets are:

$$\Delta_M[M,N],\quad \Delta_N[M,N],\quad \nabla_M[M,N],\quad \nabla_N[M,N]$$

We proved that, this subsets are submodules of the module $[M,N]$ and we study it's relation with $J[M,N]$ and $\operatorname{Tot}[M,N]$.

It is obvious that if $N$ is semi-projective and semi-potent module, then:

$$\operatorname{Tot}[M,N]=\nabla_N[M,N]$$

Also, it is obvious that if $M$ is semi-projective and semi-potent module, then:

$$\operatorname{Tot}[M,N]=\nabla_M[M,N]$$

In addition, if $M$ is $N-$semi-injective module, then the following conditions are equivalent:

1 – For every $\alpha\in[M,N]$ such that $\alpha\notin\Delta_M[M,N]$, the submodule $Ker(\alpha)$ is contained in a direct summand $K\neq M$ of $M$.

2 – The bi-module $[M,N]$ is semi-potent and $\operatorname{Tot}[M,N]=\Delta_M[M,N]$.

**Key words:** Bi-modules, Semi-potent bi-module, Radical of Module, Semi-projective (semi-injective) module.

**(2020) Mathematics Subject Classification:** 16E50 ,16N20 ,16D40 ,16D90 .

[1] Proof. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

[2] Graduate Student. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

## 1 – المقدمـــــة.

تلعب المودولات الجزئية لمودول ما، دوراً مهماً في تحديد طبيعة المودول وفي طبيعة حلقة الإندومورفيزمات لهذا المودول. فعلى سبيل المثال أثبت R. Ware في [4] أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما $M$، تكون منتظمة عندما وفقط عندما تكون $Im(f)$ و $Ker(f)$ حدوداً مباشرة في المودول $M$ وذلك لأجل كل $f \in End_R(M)$.

وفي عام 2004 أدخل F. Kasch في [3]، عدداً من البنى الجزئية في المودول الثنائي $[M, N]$، حيث $M$ و $N$ مودولان فوق حلقة $R$، مثل الأساس $J[M, N]$ والتوتال $\mathrm{Tot}[M, N]$ وغيرها. حيث درس تأثير هذه البنى الجزئية على المودول $[M, N]$. وفي عام 2009 تابع Y. Zhou في [6]، دراسة تأثير البنى الجزئية السابقة على المودول $[M, N]$، حيث أثبت أن المودول $[M, N]$ يكون شبه جامد عندما وفقط عندما يكون $J[M, N] = \mathrm{Tot}[M, N]$.

في هذه المقالة عرفنا مجموعات جزئية جديدة في المودول الثنائي $[M, N]$، هي:

$$\Delta_M[M,N], \quad \Delta_N[M,N], \quad \nabla_M[M,N], \quad \nabla_N[M,N]$$

حيث أثبتنا أن هذه المجموعات تشكل مودولات جزئية من المودول $[M, N]$. ودرسنا علاقتها بكل من $J[M, N]$ و $\mathrm{Tot}[M, N]$. وقد أثبتنا أنه لأجل المودول نصف الإسقاطي وشبه الجامد $N$ فإن:

$$\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla_N[M,N]$$

وذلك لأجل أي مودول آخر $M$. وأنه لأجل المودول نصف الإسقاطي وشبه الجامد $M$ فإن:

$$\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla_M[M,N]$$

وذلك لأجل أي مودول آخر $N$.

جميع الحلقات التي ستتم دراستها هي حلقات واحدية والمودولات فوق هذه الحلقات هي مودولات يمينية مالم يتم ذكر خلاف ذلك وبشكل صريح. ليكن $M$ مودولاً فوق حلقة $R$ ، سنرمز لحلقة الإندومورفيزمات للمودول $M$ بالشكل $E_M = End_R(M)$ .

**تعريــــف 1-1.** ليكن $M$ مودولاً فوق حلقة $R$ . نقول عن المودول الجزئي $A$ في $M$ إنه صغير في $M$ إذا كان لأجل أي مودول جزئي آخر $B$ في $M$ يحقق أن $M = A+B$ ينتج أن $B = M$ .

إذا كان $A$ مودولاً جزئياً صغيراً في $M$ سوف نرمز لذلك $A << M$ ، [1].

**تعريــــف** 1-2. ليكن $M$ مودولاً فوق حلقة $R$ . نقول عن المودول الجزئي $A$ إنه كبير في $M$ ، إذا كان لأجل أي مودول جزئي آخر $B$ في $M$ يحقق أن $A \cap B = 0$ ينتج أن $B = 0$ .

إذا كان $A$ مودولاً جزئياً كبيراً في $M$ سوف نرمز لذلك $A \leq_e M$ ، [1].

**تعريــــف** 1-3. ليكن $M$ مودولاً فوق حلقة $R$ . نسمي تقاطع جميع المودولات الجزئية الأعظمية في $M$ بأساس المودول $M$ ونرمز له $J(M)$ ، [2].

## 2 – المــودولات الثنـــائيــــة.

ليكن $M_R, N_R$ مودولين فوق حلقة $R$ . لنفرض أن $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$ ، لنفرض أيضاً أن $[M,N] = Hom_R(M,N)$ .

إن المجموعة $[M,N]$ تشكل زمرة جمعية تبديلية، وهذه الزمرة تشكل مودولاً يسارياً فوق الحلقة $E_N$ وتشكل أيضاً مودولاً يمينياً فوق الحلقة $E_M$ ، لذلك فإن الزمرة $[M,N]$ هي $(E_N, E_M)$ – مودول ثنائي.

لدينا في المودول $[M,N]$ المجموعات الآتية:

- أساس جاكبسون ويعرف بالشكل الآتي:

$$J[M,N]=\{\alpha:\alpha\in[M,N];\ \alpha\beta\in J(E_N),\quad \forall\ \beta\in[N,M]\}$$

$$J[M,N]=\{\alpha:\alpha\in[M,N];\ \beta\alpha\in J(E_M),\quad \forall\ \beta\in[N,M]\}$$

وهو مودول جزئي في المودول $[M,N]$، [6].

- المودول الجزئي الشاذ وهو مودول جزئي في المودول $[M,N]$، [6] ويعرف بالشكل الآتي:

$$\Delta[M,N]=\{\alpha:\alpha\in[M,N];\ Ker(\alpha)\leq_e M\}$$

- المودول الجزئي الشاذ الثنوي وهو مودول جزئي في المودول $[M,N]$، [6] ويعرف بالشكل الآتي:

$$\nabla[M,N]=\{\alpha:\alpha\in[M,N];\ Im(\alpha)<<N\}$$

- التوتال وهي مجموعة جزئية غير خالية في المودول $[M,N]$، [6] تعرف بالشكل الآتي:

$$\mathrm{Tot}[M,N]=\{\alpha:\alpha\in[M,N];\alpha[N,M]\ \text{has no nonzero idempotents of}\ E_N\}$$

$$\mathrm{Tot}[M,N]=\{\alpha:\alpha\in[M,N];[N,M]\alpha\ \text{has no nonzero idempotents of}\ E_M\}$$

العلاقة بين المجموعات السابقة نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

**تمهيديـــــة 2−1** [6].

ليكن $M,N$ مودولين فوق حلقة $R$. القضايا الآتية صحيحة:

1 − $J[M,N]\subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$.

2 - $\Delta[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$, $\nabla[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$.

**تعريـــــف** [6].

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. نقول عن المودول الثنائي $[M,N]$ إنه شبه جامد إذا كان لأجل كل عنصر $\alpha \in [M,N]$ بحيث إن $\alpha \notin J[M,N]$، يوجد عنصر مغاير للصفر $\gamma \in [N,M]$ يحقق أن $\gamma = \gamma\alpha\gamma$.

**مبرهنـــــــة 2-2** [6].

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. عندئذ المودول الثنائي $[M,N]$ شبه جامد عندما وفقط عندما $J[M,N] = \mathrm{Tot}[M,N]$.

## 3 – بنــــى جــزئيــــة أخـــرى فـــي المــــودول الثنــــائــــي $[M,N]$.

**تمهيديــــة 3-1.**

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. لنأخذ المجموعتين الآتيتين:

$$\nabla_N[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\, Im(\alpha\beta) << N, \quad \forall\, \beta \in [N,M] \,\}$$

$$\nabla_M[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\, Im(\beta\alpha) << M, \quad \forall\, \beta \in [N,M] \,\}$$

عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – كل من المجموعتين $\nabla_N[M,N]$ و $\nabla_M[M,N]$ تشكل مودولاً جزئياً في المودول $[M,N]$.

2 - $\nabla[M,N] \subseteq \nabla_N[M,N]$ و $\nabla[M,N] \subseteq \nabla_M[M,N]$.

3 - $\nabla_N[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ و $\nabla_M[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$.

**البرهـــــان.**

1 – واضح أن $0 \in \nabla_N[M,N]$ وبالتالي فإن $\nabla_N[M,N]$ مجموعة جزئية غير خالية في $[M,N]$. ليكن $\alpha,\gamma \in \nabla_N[M,N]$، عندئذ أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن كلاً من $Im(\alpha\beta), Im(\gamma\beta)$ مودول جزئي صغير في $N$ ومنه فإن:

$$Im((\alpha-\gamma)\beta) \subseteq Im(\alpha\beta) + Im(\gamma\beta) << N$$

وبالتالي فإن $\alpha-\gamma \in \nabla_N[M,N]$.

ليكن $\alpha \in \nabla_N[M,N]$، عندئذ:

– أياً كان $\lambda \in E_M$ وأياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن $\lambda\beta \in [N,M]$ وأن:

$$Im((\alpha\lambda)\beta) = Im(\alpha(\lambda\beta)) << N$$

ومنه فإن $\alpha\lambda \in \nabla_N[M,N]$ وهذا يبين أن $\nabla_N[M,N]$ مودول جزئي من المودول $[M,N]_{E_M}$.

– أياً كان $\lambda \in E_N$، عندئذ فإن $\lambda\alpha \in [M,N]$ وأنه أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن:

$$Im((\lambda\alpha)\beta) = Im(\lambda(\alpha\beta)) = \lambda(Im(\alpha\beta))$$

ولما كان المودول الجزئي $Im(\alpha\beta)$ صغير في $N$ نجد أن المودول الجزئي $\lambda(Im(\alpha\beta))$ صغير في $N$ ومنه فإن المودول الجزئي $Im((\lambda\alpha)\beta)$ صغير في $N$ وهذا يبين أن $\lambda\alpha \in \nabla_N[M,N]$ ومنه فإن $\nabla_N[M,N]$مودول جزئي من المودول ${}_{E_N}[M,N]$. مما سبق نجد أن $\nabla_N[M,N]$ مودول جزئي من المودول ${}_{E_N}[M,N]_{E_M}$. بطريقة مشابهة يمكننا إثبات أن المجموعة $\nabla_M[M,N]$ تشكل مودولاً جزئياً من المودول ${}_{E_N}[M,N]_{E_M}$.

2 – ليكن $\alpha \in \nabla[M,N]$، عندئذ فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ صغير في $N$، ولما كان لأجل كل $\beta \in [N,M]$ فإن $Im(\alpha\beta) \subseteq Im(\alpha)$ نجد أن $Im(\alpha\beta)$ صغير

في $N$ ومنه $\alpha \in \nabla_N[M,N]$ وبالتالي فإن $\nabla[M,N] \subseteq \nabla_N[M,N]$. بطريقة مشابهة نجد أن $\nabla[M,N] \subseteq \nabla_M[M,N]$.

3 - ليكن $\alpha \in \nabla_N[M,N]$، عندئذ فإن المودول الجزئي $Im(\alpha\beta)$ صغير في $N$ وذلك أياً كان $\beta \in [N,M]$. لنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \mathrm{Tot}[M,N]$، عندئذ يوجد عنصر $\gamma \in [N,M]$ بحيث إن $\alpha\gamma \in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر، ولما كان $Im(\alpha\gamma)$ صغيراً في $N$ نجد أن:

$$N = Im(\alpha\gamma) \oplus Im(1_N - \alpha\gamma) = Im(1_N - \alpha\gamma)$$

ومنه فإن:

$$Im(\alpha\gamma) \cap Im(1_N - \alpha\gamma) = Im(\alpha\gamma) \cap N = Im(\alpha\gamma) = 0$$

وبالتالي يكون $\alpha\gamma = 0$ وهذا غير ممكن، ومنه فإن $\alpha \in \mathrm{Tot}[M,N]$ وأن:

$$\nabla_N[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$$

وهو المطلوب. بطريقة مشابهة نجد أن $\nabla_M[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$.

### تمهيديـــــة 3-2.

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. لنأخذ المجموعتين الآتيتين:

$$\Delta_M[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\ Ker(\beta\alpha) \leq_e M, \quad \forall\, \beta \in [N,M] \}$$

$$\Delta_N[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\ Ker(\alpha\beta) \leq_e N, \quad \forall\, \beta \in [N,M] \}$$

عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 - كل من المجموعتين $\Delta_M[M,N]$ و $\Delta_N[M,N]$ تشكل مودولاً جزئياً من المودول ${}_{E_N}[M,N]_{E_M}$.

2 - $\Delta[M,N] \subseteq \Delta_M[M,N]$ و $\Delta[M,N] \subseteq \Delta_N[M,N]$.

3 - $\Delta_M[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ و $\Delta_N[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$.

**البرهـــــــان.**

1 – واضح أن $0 \in \Delta_M[M,N]$ وبالتالي فإن $\Delta_M[M,N]$ مجموعة جزئية غير خالية في $[M,N]$. ليكن $\alpha, \gamma \in \Delta_M[M,N]$، عندئذ أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن $\beta\alpha, \beta\gamma \in E_M$ وأن كلاً من:

$$Ker(\beta\alpha)\,, Ker(\beta\gamma)$$

مودول جزئي كبير في $M$، ولما كان:

$$Ker(\beta\alpha) \cap Ker(\beta\gamma) \subseteq Ker(\beta(\alpha-\gamma))$$

نجد أن المودول الجزئي $Ker(\beta(\alpha-\gamma))$ كبير في $M$ وبالتالي فإن $\alpha-\gamma \in \Delta_M[M,N]$.

ليكن $\alpha \in \Delta_M[M,N]$، عندئذ:

– أياً كان $\lambda \in E_M$ فإن $\alpha\lambda \in [M,N]$ وبالتالي أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن:

$$Ker((\beta\alpha)\lambda) = \lambda^{-1}(Ker(\beta\alpha))$$

ولما كان $\alpha \in \Delta_M[M,N]$ فإن المودول الجزئي $Ker(\beta\alpha)$ كبير في $M$ وبالتالي فإن المودول الجزئي $\lambda^{-1}(Ker(\beta\alpha))$ كبير في $M$، ولما كان:

$$Ker(\beta(\alpha\lambda)) = Ker((\beta\alpha)\lambda) = \lambda^{-1}(Ker(\beta\alpha))$$

نجد أن المودول الجزئي $Ker(\beta(\alpha\lambda))$ كبير في $M$ وذلك أياً كان $\beta \in [N,M]$ وهذا يبين أن:

$$\alpha\lambda \in \Delta_M[M,N]$$

ومنه فإن $\Delta_M[M,N]$ مودول جزئي من المودول $[M,N]_{E_M}$.

– ليكن $\lambda \in E_N$، عندئذ أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن $\beta\lambda \in [N,M]$ ولما كان $\alpha \in \Delta_M[M,N]$ فإن المودول الجزئي $Ker((\beta\lambda)\alpha)$ كبير في $M$ ولما كان $\lambda\alpha \in [M,N]$ وأن:

$$Ker((\beta\lambda)\alpha)=Ker(\beta(\lambda\alpha))$$

نجد أن المودول الجزئي $Ker(\beta(\lambda\alpha))$ كبير في $M$ وذلك أياً كان $\beta\in[N,M]$ ومنه فإن $\lambda\alpha\in\Delta_M[M,N]$. وهذا يبين أن $\Delta_M[M,N]$ مودول جزئي من المودول ${}_{E_N}[M,N]_{E_M}$.

مما سبق نجد أن $\Delta_M[M,N]$ مودول جزئي من المودول ${}_{E_N}[M,N]_{E_M}$. بطريقة مشابهة يمكننا إثبات أن المجموعة $\Delta_N[M,N]$ تشكل مودولاً جزئياً من المودول ${}_{E_N}[M,N]_{E_M}$.

2 – ليكن $\alpha\in\Delta[M,N]$، عندئذ فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ كبير في $M$، ولما كان لأجل كل $\beta\in[N,M]$ فإن $Ker(\alpha)\subseteq Ker(\beta\alpha)$ نجد أن المودول الجزئي $Ker(\beta\alpha)$ كبير في $M$ ومنه فإن $\alpha\in\Delta_M[M,N]$ وبالتالي يكون $\Delta[M,N]\subseteq\Delta_M[M,N]$. بطريقة مشابهة نجد أن:

$$\Delta[M,N]\subseteq\Delta_N[M,N]$$

3 – ليكن $\alpha\in\Delta_M[M,N]$، عندئذ أياً كان $\beta\in[N,M]$ فإن المودول الجزئي $Ker(\beta\alpha)$ كبير في $M$. لنفرض جدلاً أن $\alpha\notin \mathrm{Tot}[M,N]$، عندئذ يوجد $\gamma\in[N,M]$ بحيث إن $\gamma\alpha\in E_M$ عنصر جامد مغاير للصفر، ومنه فإن:

$$M=Im(\gamma\alpha)\oplus Im(1_M-\gamma\alpha)=Im(\gamma\alpha)\oplus Ker(\gamma\alpha)$$

ولما كان $Ker(\gamma\alpha)$ كبيراً في $M$ وأن $Im(\gamma\alpha)\cap Ker(\gamma\alpha)=0$ نجد أن $Im(\gamma\alpha)=0$ ومنه فإن $\gamma\alpha=0$ وهذا غير ممكن، وبالتالي فإن $\alpha\in \mathrm{Tot}[M,N]$ وأن $\Delta_M[M,N]\subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$.

بطريقة مشابهة نجد أن $\Delta_N[M,N]\subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$.

**تمهيديـــــــة 3-3.**

لتكن $M, N, W$ مودولات فوق حلقة $R$ . عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 - $\nabla_N[M, N]\cdot[W, M]\subseteq\nabla_N[W, N]$ .

2 - $[N,W]\cdot\nabla_M[M, N]\subseteq\nabla_M[M,W]$ .

3 - $\Delta_N[M, N]\cdot[W, M]\subseteq\Delta_N[W, N]$ .

4 - $[N,W]\cdot\Delta_M[M, N]\subseteq\Delta_M[M,W]$ .

**البرهـــــــان.**

1 - ليكن $\alpha\in\nabla_N[M, N]$ و $\gamma\in[W, M]$ ، عندئذ فإن $\alpha\gamma\in[W, N]$ وأنه أياً كان $\beta\in[N,W]$ فإن $(\alpha\gamma)\beta\in E_N$ ويحقق $Im((\alpha\gamma)\beta)=Im(\alpha(\gamma\beta))$ .

لما كان $\gamma\beta\in[N, M]$ وأن $\alpha\in\nabla_N[W, N]$ نجد أن المودول الجزئي $Im(\alpha(\gamma\beta))$ صغير في $N$ وذلك أياً كان $\beta\in[N,W]$ ومنه نجد أن $\alpha\gamma\in\nabla_N[W, N]$ ومنه فإن:

$$\nabla_N[M, N]\cdot[W, M]\subseteq\nabla_N[W, N]$$

2 – يبرهن بطريقة مشابهة.

3 - ليكن $\alpha\in\Delta_N[M, N]$ و $\gamma\in[W, M]$ ، عندئذ فإن $\alpha\gamma\in[W, N]$ وأنه أياً كان $\beta\in[N,W]$

فإن $\gamma\beta\in[N, M]$ ، ولما كان $\alpha\in\Delta_N[M, N]$ نجد أن المودول الجزئي $Ker(\alpha(\gamma\beta))$ كبير في $N$ ، ولما كان $\alpha(\gamma\beta)=(\alpha\gamma)\beta$ نجد أن المودول الجزئي $Ker((\alpha\gamma)\beta)$ كبير في $N$ وذلك أياً كان $\beta\in[N,W]$ ومنه فإن $\alpha\gamma\in\Delta_N[W, N]$ وهذا يبين أن:

$$\Delta_N[M, N]\cdot[W, M]\subseteq\Delta_N[W, N]$$

4 – يبرهن بطريقة مشابهة.

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$ . لنأخذ المجموعات الآتية:

$$\nabla'[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\, Im(1_N - \alpha\beta) = N\,,\quad \forall\, \beta \in [N,M]\,\}$$
$$\nabla''[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\, Im(1_M - \beta\alpha) = M\,,\quad \forall\, \beta \in [N,M]\,\}$$
$$\Delta'[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\, Ker(1_N - \alpha\beta) = 0\,,\quad \forall\, \beta \in [N,M]\,\}$$
$$\Delta''[M,N] = \{\, \alpha : \alpha \in [M,N];\, Ker(1_M - \beta\alpha) = 0\,,\quad \forall\, \beta \in [N,M]\,\}$$

من الواضح أن المجموعات السابقة هي مجموعات جزئية غير خالية من المودول $[M,N]$ وذلك لأن التشاكل الصفري ينتمي إلى جميع المجموعات السابقة، فضلاً عن ذلك التمهيدية الآتية صحيحة:

**تمهيديــــــة 3–4.**

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$ . عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – $\nabla'[M,N] = \nabla''[M,N]$ .

2 – $\Delta'[M,N] = \Delta''[M,N]$ .

3 – $J[M,N] \subseteq \nabla'[M,N],\quad J[M,N] \subseteq \Delta'[M,N]$ .

4 – $J[M,N] = \nabla'[M,N] \cap \Delta'[M,N]$ .

5 – $\nabla'[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N],\quad \Delta'[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ .

**البرهـــــــان.**

1 – ليكن $\alpha \in \nabla'[M,N]$، عندئذ أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن $Im(1_N - \alpha\beta) = N$ وبالتالي فإن $Im(1_M - \beta\alpha) = M$ ومنه فإن $\alpha \in \nabla''[M,N]$ وبالتالي فإن $\nabla'[M,N] \subseteq \nabla''[M,N]$ .

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات الاحتواء المعاكس.

2 – ليكن $\alpha \in \Delta'[M,N]$، عندئذ أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن $Ker(1_N - \alpha\beta) = 0$ وبالتالي فإن $Ker(1_M - \beta\alpha) = 0$ ومنه فإن $\alpha \in \Delta''[M,N]$ وبالتالي فإن $\Delta'[M,N] \subseteq \Delta''[M,N]$.

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات الاحتواء المعاكس.

3 – ليكن $\alpha \in J[M,N]$، عندئذ أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن $1_N - \alpha\beta \in E_N$ عنصر قابل للقلب في الحلقة $E_N$ ومنه فإن $Im(1_N - \alpha\beta) = N$ وأن $Ker(1_N - \alpha\beta) = 0$ ومنه فإن $\alpha \in \nabla'[M,N]$ و $\alpha \in \Delta'[M,N]$ وهذا يبين أن $J[M,N] \subseteq \Delta'[M,N]$, $J[M,N] \subseteq \nabla'[M,N]$.

4 – لدينا حسب (3) أن $J[M,N] \subseteq \Delta'[M,N]$, $J[M,N] \subseteq \nabla'[M,N]$ ومنه فإن:

$$J[M,N] \subseteq \nabla'[M,N] \cap \Delta'[M,N]$$

ليكن $\alpha \in \nabla'[M,N] \cap \Delta'[M,N]$، عندئذ فإن $\alpha \in [M,N]$ وأنه أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن $Im(1_N - \alpha\beta) = N$ و $Ker(1_N - \alpha\beta) = 0$ ومنه فإن $1_N - \alpha\beta \in E_N$ عنصر قابل للقلب في الحلقة $E_N$ وبالتالي فإن $\alpha \in J[M,N]$ وهكذا نجد أن $\nabla'[M,N] \cap \Delta'[M,N] \subseteq J[M,N]$. مما سبق نجد أن $J[M,N] = \nabla'[M,N] \cap \Delta'[M,N]$.

5 – ليكن $\alpha \in \nabla'[M,N]$، عندئذ فإن $Im(1_N - \alpha\beta) = N$ وذلك أياً كان $\beta \in [N,M]$. لنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \mathrm{Tot}[M,N]$، عندئذ يوجد عنصر $\gamma \in [N,M]$ بحيث إن $\alpha\gamma \in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر، ومنه فإن $N = Im(\alpha\gamma) \oplus Im(1_N - \alpha\gamma)$. ولما كان $Im(1_N - \alpha\gamma) = N$ نجد أن:

$$Im(\alpha\gamma) \cap Im(1_N - \alpha\gamma) = Im(\alpha\gamma) \cap N = Im(\alpha\gamma) = 0$$

ومنه $\alpha\gamma = 0$ وهذا غير ممكن، وبالتالي فإن $\alpha \in \mathrm{Tot}[M,N]$ وأن $\nabla'[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ .

ليكن $\alpha \in \Delta'[M,N]$ ، عندئذ فإن $Ker(1_N - \alpha\beta) = 0$ وذلك أياً كان $\beta \in [N,M]$ . لنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \mathrm{Tot}[M,N]$ ، عندئذ يوجد عنصر $\gamma \in [N,M]$ بحيث إن $\alpha\gamma \in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر، ومنه فإن:

$$N = Im(\alpha\gamma) \oplus Im(1_N - \alpha\gamma) = Ker(1_N - \alpha\gamma) \oplus Ker(\alpha\gamma)$$

ولما كان $Ker(1_N - \alpha\gamma) = 0$ نجد أن $Ker(\alpha\gamma) = N$ ومنه فإن $\alpha\gamma = 0$ وهذا غير ممكن، وبالتالي فإن $\alpha \in \mathrm{Tot}[M,N]$ وأن $\Delta'[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ .

**تمهيديــــــة 3-5.**

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$ . إذا كان $\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla[M,N]$ ، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 - $\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla_N[M,N]$ ،

2 - $\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla_M[M,N]$ .

**البرهـــــــان.**

1 - لنفرض أن $\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla[M,N]$ . لدينا حسب التمهيدية (3-1) أن:

$$\nabla_N[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$$

ليكن $\alpha \in \mathrm{Tot}[M,N]$ ، لنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \nabla_N[M,N]$ ، عندئذ يوجد $\beta \in [N,M]$ بحيث إن المودول الجزئي $Im(\alpha\beta)$ ليس صغيراً في $N$ ، ولما كان $Im(\alpha\beta) \subseteq Im(\alpha)$ نجد أن $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في $N$ ومنه فإن $\alpha \notin \nabla[M,N]$ وحسب الفرض نجد أن $\alpha \notin \mathrm{Tot}[M,N]$ وهذا غير ممكن، ومنه $\mathrm{Tot}[M,N] \subseteq \nabla_N[M,N]$ وبالتالي يكون $\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla_N[M,N]$ .

2 - يبرهن بطريقة مشابهة.

**تمهيديـــــة 3-6.**

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. إذا كان $\mathrm{Tot}[M,N]=\Delta[M,N]$، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 - $\mathrm{Tot}[M,N]=\Delta_N[M,N]$،

2 - $\mathrm{Tot}[M,N]=\Delta_M[M,N]$.

**البرهـــــان.**

1 - لنفرض أن $\mathrm{Tot}[M,N]=\Delta[M,N]$. لدينا حسب التمهيدية (3-2) أن:

$$\Delta_N[M,N]\subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$$

ليكن $\alpha\in \mathrm{Tot}[M,N]$ عندئذ حسب الفرض $\alpha\in\Delta[M,N]$ ومنه فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ كبير في $M$ ولما كان لأجل أي عنصر $\beta\in[N,M]$ فإن $\beta^{-1}(Ker(\alpha))=Ker(\alpha\beta)$ نجد أن المودول الجزئي $Ker(\alpha\beta)$ كبير في $N$ ومنه فإن $\alpha\in\Delta_N[M,N]$ وبالتالي فإن:

$$\mathrm{Tot}[M,N]\subseteq \Delta_N[M,N]$$

وبالتالي يكون $\mathrm{Tot}[M,N]=\Delta_N[M,N]$.

2 - يبرهن بطريقة مشابهة.

**تمهيديـــــة 3-7.**

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. إذا كان المودول الثنائي $[M,N]$ شبه جامد، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 - $\nabla'[M,N]=\Delta'[M,N]$.

2 - $J[M,N]=\nabla'[M,N]=\Delta'[M,N]$.

**البرهــــــان.**

لنفرض أن المودول $[M,N]$ شبه جامد، عندئذ فإن $J[M,N]=\mathrm{Tot}[M,N]$ .

1 – لدينا حسب التمهيدية (3–4) أن $\nabla'[M,N]\subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ و $\Delta'[M,N]\subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$ . كما أن $J[M,N]=\nabla'[M,N]\cap\Delta'[M,N]$ ومنه نجد أن:

$$\nabla'[M,N]\subseteq\nabla'[M,N]\cap\Delta'[M,N]$$

$$\Delta'[M,N]\subseteq\nabla'[M,N]\cap\Delta'[M,N]$$

وهذا يبين أن $\nabla'[M,N]\subseteq\Delta'[M,N]$ و $\Delta'[M,N]\subseteq\nabla'[M,N]$ ومنه فإن:

$$\Delta'[M,N]=\nabla'[M,N]$$

2 – لدبنا حسب التمهيدية (3–4) أن $J[M,N]=\nabla'[M,N]\cap\Delta'[M,N]$ ويحسب (1) نجد أن:

$$J[M,N]=\nabla'[M,N]\cap\Delta'[M,N]=\nabla'[M,N]=\Delta'[M,N]$$

## 4 – المــودولات $M$ –نصــــف الإسقــــاطيـــــة.

**تعريـــــف** [5].

ليكن $M,N$ مودولين فوق حلقة $R$ . نقول عن المودول $N$ إنـه $M$ –نصف إسقاطي إذا كـان لأجـل كـل $\alpha\in[M,N]$ فـإن $\alpha[N,M]=[N,Im(\alpha)]$ . ونقــول عــن المودول $M$ فوق الحلقة $R$ إنه نصف إسقاطي إذا كان $M$ –نصف إسقاطي.

**تمهيديـــــة 4–1.**

ليكن $M,N$ مودولين فوق حلقة $R$ . إذا كان المودول $N$ هو $M$ –نصف إسقاطي، عندئذ فإن:

$$\nabla_N[M,N]\subseteq J[M,N]$$

**البرهـــــــان.**

ليكن $\alpha \in \nabla_N [M,N]$، عندئذ أياً كان $\beta \in [N,M]$ فإن المودول الجزئي $Im(\alpha\beta)$ صـــــغير فـــــي $N$ ولمـــــا كـــــان $N = Im(\alpha\beta) + Im(1_N - \alpha\beta)$ نجـــــد أن $N = Im(1_N - \alpha\beta)$ ولمــا كــان المــودول $N$ هــو $M-$نصــف إســقاطي نجــد أن $E_N = (1_N - \alpha\beta)E_N$ وهذا يبين أن $\alpha \in J[M,N]$ ومنه فإن:

$$\nabla_N[M,N] \subseteq J[M,N]$$

**مبرهنـــــة 4-2.**

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 – إذا كان المودول $N$ نصف إسقاطي وشبه جامد فإن $\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla_N[M,N]$.

2 – إذا كان المودول $M$ نصف إسقاطي وشبه جامد فإن $\mathrm{Tot}[M,N] = \nabla_M[M,N]$.

**البرهـــــــان.**

1 – لنفرض أن المودول $N$ نصف إسقاطي وشبه جامد. لدينا حسب التمهيدية (3-2) أن:

$$\nabla_N[M,N] \subseteq \mathrm{Tot}[M,N]$$

ليكن $\alpha \in \mathrm{Tot}[M,N]$ ولنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \nabla_N[M,N]$، عندئذ يوجد عنصر $\beta \in [N,M]$ بحيث إن المودول الجزئي $Im(\alpha\beta)$ ليس صغيراً في $N$ ولما كان المودول $N$ شبه جامد فإن المودول الجزئي $Im(\alpha\beta)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول $N$ وبالتالي يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in E_N$ بحيث إن $Im(e) \subseteq Im(\alpha\beta)$ ومنه فإن:

$$Im(e) = e(Im(e)) \subseteq Im(e\alpha\beta) \subseteq Im(e)$$

ومنه فإن $Im(e) = Im(e\alpha\beta)$ ولما كان المودول $N$ نصف إسقاطي نجد أن:

$$eE_N = hom_R(N, Im(e)) = hom_R(N, Im(e\alpha\beta)) = (e\alpha\beta)E_N$$

وبالتالي يوجد عنصر مغاير للصفر $\lambda \in E_N$ بحيث إن $e = (e\alpha\beta)\lambda$ ومنه فإن:

$$\beta\lambda e = (\beta\lambda e)\alpha(\beta\lambda)$$

وبالتالي يكون $\beta\lambda e = (\beta\lambda e)\alpha(\beta\lambda e)$.

لنضع $g = \alpha(\beta\lambda e)$ فنجد أن $g \in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر، ولما كان $\beta\lambda e \in [N, M]$ نجد أن $g = \alpha(\beta\lambda e) \in \alpha[N, M]$ وهذا يناقض كون $\alpha \in \mathrm{Tot}[M, N]$، ومنه نجد أن:

$$\alpha \in \nabla_N[M, N]$$

وبالتالي فإن $\mathrm{Tot}[M, N] \subseteq \nabla_N[M, N]$. مما سبق نجد أن $\mathrm{Tot}[M, N] = \nabla_N[M, N]$.

2 – لنفرض أن المودول $M$ نصف إسقاطي وشبه جامد. لدينا حسب التمهيدية (3−2) أن:

$$\nabla_M[M, N] \subseteq \mathrm{Tot}[M, N]$$

ليكن $\alpha \in \mathrm{Tot}[M, N]$ ولنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \nabla_M[M, N]$، عندئذ يوجد عنصر $\beta \in [N, M]$ بحيث إن المودول الجزئي $Im(\beta\alpha)$ ليس صغيراً في $M$ ولما كان المودول $M$ شبه جامد فإن المودول الجزئي $Im(\beta\alpha)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول $M$ وبالتالي يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in E_M$ بحيث إن $Im(e) \subseteq Im(\beta\alpha)$ ومنه فإن:

$$Im(e) = e(Im(e)) \subseteq Im(e\beta\alpha) \subseteq Im(e)$$

ومنه فإن $Im(e) = Im(e\beta\alpha)$ ولما كان المودول $M$ نصف إسقاطي نجد أن:

$$eE_M = hom_R(M, Im(e)) = hom_R(M, Im(e\beta\alpha)) = (e\beta\alpha)E_M$$

وبالتالي يوجد عنصر مغاير للصفر $\lambda \in E_M$ بحيث إن $e=(e\beta\alpha)\lambda$ ومنه فإن $e=e\beta\alpha\lambda e$ وأن $\lambda e=(\lambda e\beta)\alpha\lambda e$ وبالتالي يكون $\lambda e\beta=(\lambda e\beta)\alpha(\lambda e\beta)$ . لنضع $g=\alpha(\lambda e\beta)$ فنجد أن $g \in E_M$ عنصر جامد مغاير للصفر، ولما كان $\lambda e\beta \in [N,M]$ نجد أن $g=\alpha(\lambda e\beta) \in \alpha[N,M]$ وهذا يناقض كون $\alpha \in \mathrm{Tot}[M,N]$، ومنه فإن $\alpha \in \nabla_M[M,N]$ وبالتالي يكون $\mathrm{Tot}[M,N] \subseteq \nabla_M[M,N]$ . مما سبق نجد أن $\mathrm{Tot}[M,N]=\nabla_M[M,N]$ .

**مبرهنـــــــة 4-3.**

ليكن $M,N$ مودولين فوق حلقة $R$ . إذا كان المودول $N$ هو $M-$نصف إسقاطي، عندئذ القضيتان الآتيتان متكافئتان:

1 – لأجل كل عنصر $\alpha \in [M,N]$ بحيث $\alpha \notin \nabla_N[M,N]$ فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول $N$ .

2 – المودول $[M,N]$ شبه جامد وأن $J[M,N]=\nabla_N[M,N]$ .

**البرهـــــــان.**

$(1)\Leftarrow(2)$. لما كان المودول $N$ هو $M-$نصف إسقاطي، فإنه حسب التمهيدية (4-1) يكون:

$$\nabla_N[M,N] \subseteq J[M,N]$$

ليكن $\alpha \in J[M,N]$ ولنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \nabla_N[M,N]$،عندئذ حسب الفرض فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول $N$ وبالتالي يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in E_N$ بحيث إن $Im(e) \subseteq Im(\alpha)$، و لما كان المودول $N$ هو $M-$نصف إسقاطي نجد أن:

$$e \in eE_N \subseteq \alpha[N,M] \subseteq J(E_N)$$

وهذا غير ممكن، ومنه فإن $\alpha \in \nabla_N [M, N]$ وبالتالي فإن $J[M, N] \subseteq \nabla_N [M, N]$ وهكذا نجد أن $J[M, N] = \nabla_N [M, N]$ .

ليكن $\alpha \in [M, N]$ وأن $\alpha \notin J[M, N]$ ، عندئذ فإن $\alpha \notin \nabla_N [M, N]$ وبحسب الفرض فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول $N$ وبالتالي يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in E_N$ بحيث إن $Im(e) \subseteq Im(\alpha)$، و لما كان المودول $N$ هو $M-$نصف إسقاطي نجد أن:

$$e \in e E_N \subseteq \alpha[N, M]$$

وبالتالي يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in [N, M]$ بحيث إن $e = \alpha\beta$ ومنه نجد أن $e = e\alpha\beta e$ كما أن $\beta e = (\beta e)\alpha(\beta e)$ . لنضع $\gamma = \beta e$ فنجد أن $\gamma \in [N, M]$ عنصر مغاير للصفر وأن $\gamma = \gamma\alpha\gamma$ ومنه فإن المودول $[M, N]$ شبه جامد.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $\alpha \in [M, N]$ بحيث إن $\alpha \notin \nabla_N [M, N]$، حسب الفرض فإن $\alpha \notin J[M, N]$ ولما كان المودول $[M, N]$ شبه جامد فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $\gamma \in [N, M]$ بحيث إن $\gamma = \gamma\alpha\gamma$ . لنضع $e = \alpha\gamma$ فنجد أن $e \in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن $Im(e)$ حد مباشر مغاير للصفر للمودول $N$ وأن $Im(e) = Im(\alpha\gamma) \subseteq Im(\alpha)$ .

## 5 – المــودولات $N-$نصـــف الأفقيــــــة.

**تعريـــف** [5].

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$ . نقول عن المودول $N$ إنه $N-$نصف أفقي إذا كان لأجل أي عنصر $\alpha \in [M, N]$ فإن $[N, M]\alpha = \ell_{E_M}(Ker(\alpha)) = \ell_{E_M}(r_M(\alpha))$. ونقول عن المودول $M$ فوق الحلقة $R$ إنه نصف أفقي إذا كان $M-$نصف أفقي.

**تمهيديـــــة 5-1.**

ليكن $M_R, N_R$ مودولين فوق حلقة $R$. إذا كان المودول $M$ هو $N-$نصف أفقي، عندئذ فإن:

$$\Delta_M[M,N] \subseteq J[M,N]$$

**البرهـــــــان.**

لـــيكن $\alpha \in \Delta_M[M,N]$، عندئـــذ أيـــاً كـــان $\beta \in [N,M]$ فـــإن المـــودول الجزئي $Ker(\beta\alpha)$ كبير في $M$ ولما كان $Ker(\beta\alpha) \cap Ker(1_M - \beta\alpha) = 0$ نجد أن $Ker(1_M - \beta\alpha) = 0$، ومنه فإن:

$$\ell_{E_M}(Ker(1_M - \beta\alpha)) = \ell_{E_M}(0) = E_M$$

ولما كان المودول $M$ هو $N-$نصف أفقي نجد أن $E_M = E_M(1_M - \beta\alpha)$ ومنه فإن $\alpha \in J[M,N]$ وبالتالي يكون $\Delta_M[M,N] \subseteq J[M,N]$.

**مبرهنـــــة 5-2.**

ليكن $M, N$ مودولين فوق حلقة $R$. إذا كان المودول $M$ هو $N-$نصف أفقي، عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – لأجل كل عنصر $\alpha \in [M,N]$ بحيث $\alpha \notin \Delta_M[M,N]$ فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول $M$.

2 – المودول $[M,N]$ شبه جامد وأن $J[M,N] = \Delta_M[M,N]$.

**البرهـــــــان.**

$(1) \Longleftarrow (2)$. لما كان المودول $M$ هو $N-$نصف أفقي، فإنه بحسب التمهيدية $(5-1)$ فإن:

$$\Delta_M[M,N] \subseteq J[M,N]$$

ليكن $\alpha \in [M,N]$، ولنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \Delta_M [M,N]$، عندئذ حسب الفرض فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول $M$، وبالتالي يوجد عنصر جامد $e \in E_M$ بحيث $e \neq 1$ وأن $Ker(\alpha) \subseteq Im(e)$، ومنه فإن:

$$Ker(\alpha) \subseteq Im(e) = Ker(1_M - e)$$

وبالتالي يكون $\ell_{E_M}(Ker(\alpha)) \subseteq \ell_{E_M}(Ker(1_M - e))$. لما كان المودول $M$ هو $N-$نصف أفقي، نجد أن $E_M(1_M - e) \subseteq [N,M]\alpha$. وبالتالي يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in E_M$ بحيث إن:

$$1_M - e = \beta\alpha \in J(E_M)$$

وهذا غير ممكن، لأن $1_M - e$ عنصر جامد مغاير للصفر، ومنه فإن $\alpha \in \Delta_M [M,N]$، أي إن:

$J[M,N] \subseteq \Delta_M [M,N]$. مما سبق نجد أن $J[M,N] = \Delta_M [M,N]$.

ليكن $\alpha \in [M,N]$ بحيث إن $\alpha \notin J[M,N]$، عندئذ فإن $\alpha \notin \Delta_M [M,N]$، وحسب الفرض فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول $M$، وبالتالي يوجد عنصر جامد $e \in E_M$ بحيث $e \neq 1$ وأن $Ker(\alpha) \subseteq Im(e) = Ker(1_M - e)$، ومنه فإن:

$$\ell_{E_M}(Ker(1_M - e)) \subseteq \ell_{E_M}(Ker(\alpha))$$

ولما كان المودول $M$ هو $N-$نصف أفقي، نجد أن $E_M(1_M - e) \subseteq [N,M]\alpha$، وبالتالي يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in E_M$ بحيث إن $1_M - e = \beta\alpha$، وبالتالي فإن:

$$1_M - e = (1_M - e)\beta\alpha(1_M - e)$$

ومنه نجد أن $(1_M - e)\beta = (1_M - e)\beta\alpha(1_M - e)\beta$.

لنضع $g = (1_M - e)\beta$، فنجد أن $g \in [N,M]$ عنصر مغاير للصفر ويحقق $g = g\alpha g$، ومنه فإن المودول $[M,N]$ شبه جامد.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $\alpha \in [M,N]$ بحيث إن $\alpha \notin \Delta_M [M,N]$، حسب الفرض فإن $\alpha \notin J[M,N]$، ولما كان المودول $[M,N]$ شبه جامد فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $\gamma \in [N,M]$ بحيث إن $\gamma = \gamma\alpha\gamma$ . لنضع $e = \gamma\alpha$ فنجد أن $e \in E_M$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن:

$$Ker(e) = Ker(\gamma\alpha)$$

حد مباشر للمودول $M$ وأن $Ker(\alpha) \subseteq Ker(\gamma\alpha) = Ker(e)$، فضلاً عن ذلك إن $Ker(e) \neq M$ .

## المـــراجـــــع العـــلميـــــة.

[1] – Anderson, F. W. and Fuller, K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer 1973.

[2] – Kasch F., " Modules and Rings ", London Math. Soc. Mono. 1982.

[3] – Kasch, F., and Mader, A., " Rings, Modules, and The Total", Front. Math., Birkhauser Verlag, Basel, (2004).

[4] Ware, R., " Endomorphism Rings of Projective Modules ", Trans. Amer. Math. Soc. 155, p. 233 – 256. (1971).

[5] – Wisbauer, R., " Foundations of Modules and Rings ", Gordon, 1991.

[6] – Zhou, Y., " On (Semi) Regularity and The Total of Rings and Modules ". Journal of Algebra, 322, (2009).p. 562 – 578.