التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، والمتقاطعة بأربعة مستقيمات شكلت مستقيمين مضاعفين (II)

د.عصام ديبان: أستاذ مساعد في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

حنان ابراهيم: طالبة دكتوراه في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

ملخص البحث:

ندرس في هذا البحث إحدى حالات تقاطع الأغلفة الخطية لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية F_n المعطاة بالمعادلة:

$$R\left(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i Z_i\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_{\lambda+j}Z_{\lambda+j}\right)+$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{g-2}\chi_{r_1+k}Z_{r_1+k}\right)+P\left(y_4^2+\sum_{\ell=1}^{v-1}\psi_{r+\ell}Z_{r+\ell}\right)=c$$

عندما تتقاطع هذه الأغلفة بأربعة مستقيمات، وينطبق بعضها لتشكّل مستقيمين مضاعفين. ونوجد العلاقات التي تربط بين الدوال ξ,ζ,χ,ψ وكثيرات الحدود R,S,T,P ، ونحدد المتراجحة الهندسية الواجب تحققها، حتى يكون تموضع الغلاف الرابع عشوائياً.

كلمات مفتاحية: سطح جبري، غلاف خطي، منحى تناظر، مستوي تناظر، زمرة تامة.

Mutual arrangement of linear envelopes of the four orbits of symmetry directions, intersecting by four straights which form two multiple straights (II)

Abstract:

In this research, we study one of the cases of intersection of linear envelopes for the orbits of symmetry directions of algebraic surfaces F_n, given by the equation:

$$R\left(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i Z_i\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_{\lambda+j}Z_{\lambda+j}\right)+$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{g-2}\chi_{r_1+k}Z_{r_1+k}\right)+P\left(y_4^2+\sum_{\ell=1}^{v-1}\psi_{r+\ell}Z_{r+\ell}\right)=c$$

when theses envelopes intersect by four straights (in this case, two multiple straights). And we find the relationships between the functions ξ,ζ,χ,ψ ,and the polynomials R,S,T,P , then we define the geometric inequality, which makes the position of the fourth envelope random.

Keywords: Algebraic surface, linear envelope, symmetry direction, symmetry plane, complete group.

1. مقدمة:

أصبحت دراسة التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية F_n في الفضاء الإقليدي E^m، من أهم القضايا العلمية، وهذا ما اتضح بمتابعة دراسة النظرية الهندسية للامتغيرات الزمر.

وتمت دراسة هذه القضية بشكل كامل، من أجل ثلاثة مدارات [6] ,[7]، وأربعة مدارات غير متقاطعة، والمتقاطعة بمستقيم واحد [5] ,[8]، والمتقاطعة بمستقيمين مختلفين، وبثلاثة مستقيمات مختلفة، وبثلاثة مستقيمات عندما ينطبق اثنان منها [1] ,[2] ,[3] ,[9] ,[10] ,[11] ,[12] ، وتتم حالياً دراسة حالة تقاطع الأغلفة الخطية بأربعة مستقيمات مختلفة، وذلك ضمن أطروحة دكتوراه مسجلة في جامعة البعث للباحثة زينة جبر، أما في حال انطباق بعض هذه المستقيمات الأربعة فقد تشكل مستقيمين مضاعفين، وقد تم دراسة إحدى هذه الحالات [4] ، وفي هذا البحث سوف ندرس حالة أخرى من هذه التقاطعات.

2. هدف البحث:

نهدف للحصول على المتراجحات الهندسية، التي تعين الشرط النهائي للتموضع المتبادل لتلك الأغلفة الخطية، ويتم في هذا السياق إيجاد المعادلة القانونية للسطوح الجبرية الخاصة F_n، اللامتغيرة بالنسبة للزمر التامة G، وإيجاد معادلات مستويات تناظر هذه السطوح.

ويأتي هذا البحث كمتابعة لدراسة حالة تقاطع الأغلفة الخطية بأربعة مستقيمات شكلت مستقيمين مضاعفين، بتفصيل إحدى حالات التقاطع، ومقارنة النتائج مع نتائج بحثنا السابق.

3. المناقشة والنتائج:

قبل البدء بدراسة معادلة السطح F_n لابدّ من إدخال بعض الرموز والمصطلحات اللازمة للدراسة:

Π^λ: الغلاف الأول، Π^μ: الغلاف الثاني، Π^ν: الغلاف الثالث، Π^{v}: الغلاف الرابع

λ : بُعد الغلاف الأول ، μ : بُعد الغلاف الثاني

ν : بُعد الغلاف الثالث ، v : بُعد الغلاف الرابع

ويتحقق:

$$\lambda \geq \mu \geq \nu \geq \mathrm{v}$$

$$\Pi^{\mathrm{r}_1} = \Pi^\lambda + \Pi^\mu \quad , \quad \Pi^{\mathrm{r}} = \Pi^{\mathrm{r}_1} + \Pi^\nu$$

$$\Pi^{\mathrm{r}_2} = \Pi^\lambda + \Pi^\nu \quad , \quad \Pi^{\mathrm{r}_3} = \Pi^\mu + \Pi^\nu$$

$$\Pi^{\mathrm{g}} = \Pi^\nu \cap \Pi^{\mathrm{r}_1} \quad , \quad \Pi^{\mathrm{v}_t} = \Pi^\nu \cap \Pi^{r_t} \;;\; (t = 1,2,3)$$

ليكن السطح F_n $(n > 2)$ غير الإسطواني، ذو زمرة التناظر التامة G، معطى في جملة الإحداثيات الديكارتية بالمعادلة:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i Z_i\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z_{\lambda+j}\right) + \qquad (1)$$

$$+T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{g-2} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{\ell=1}^{v-1} \psi_{r+\ell} Z_{r+\ell}\right) = c$$

حيث تتعلق كثيرات الحدود R, S, T, P والدوال الخطية $\xi_i \,, \zeta_{\lambda+j} \,, \chi_{r_1+k} \,, \psi_{r+\ell}$ بالمتحولات $x_\tau(\tau = \overline{1, \rho})$. [5]

لندرس إحدى حالات تقاطع الأغلفة الخطية الأربعة بأربعة مستقيمات، في حال انطباق هذه المستقيمات وتحولها إلى مستقيمين مضاعفين، وهي الحالة التالية:

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu \cap \Pi^\nu = OZ_1$$

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\nu \cap \Pi^{\mathrm{v}} = OZ_\lambda$$

يتأثر التموضع المتبادل للأغلفة الخطية بتقاطع المستوي Π^{v} مع المستويات Π^{r_t} ، وبالتالي لإيجاد الشروط العامة لهذا التموضع، لا بدّ من دراسة ثلاث حالات أساسية مختلفة وهي: $\mathrm{v}_3 = 0 \,, \mathrm{v} \geq \mathrm{v}_1 > 0$ (1

$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_3 = 0 \,, \mathrm{v} \geq \mathrm{v}_2 > 0$ (2

$\mathrm{v}_1 = 0 \,, \mathrm{v} \geq \mathrm{v}_3 > 0$ (3

وفي حالة التقاطع المدروسة، ولكون مستقيم التقاطع بين Π^{v} و Π^{r_2} موجود بشكل صريح، مايجعل الحالة الثانية هي الأبرز، فقد اخترنا في هذا البحث دراستها بالتفصيل.

أولاً: دراسة حالة $\mathbf{v_1 = v_3 = 0 \,, v \geq v_2 > 0}$

في هذه الحالة تتحقق العلاقات:

$$\begin{aligned}
R &= R_0 . \zeta_{\lambda+1} \quad , \quad S = R_0 . \xi_\lambda \\
R &= T_0 . \chi_{r_1+1} \quad , \quad T = T_0 . \xi_\lambda \\
T &= T_0 . \psi_{r+1} \quad , \quad P = T_0 . \chi_{r_1+2}
\end{aligned} \qquad (2)$$

$$R = P_0.\psi_{r+1} \qquad , \qquad P = P_0.\xi_{\lambda-1}$$

حيث:

$$\zeta_{\lambda+1} \neq c\xi_\lambda \quad , \quad \chi_{r_1+1} \neq c\xi_\lambda \quad , \quad \psi_{r+1} \neq c\xi_{\lambda-1} \quad , \quad \psi_{r+1} \neq c\chi_{r_1+2}$$

من (2) نجد:

$$R_0.\zeta_{\lambda+1} = T_0.\chi_{r_1+1} \Rightarrow R_0 = \frac{T_0}{\zeta_{\lambda+1}}\chi_{r_1+1}$$

بوضع $R_1 = \frac{T_0}{\zeta_{\lambda+1}}$ نجد:

$$R_0 = R_1\chi_{r_1+1} \qquad \& \qquad T_0 = R_1\zeta_{\lambda+1}$$

$$R_0.\zeta_{\lambda+1} = P_0.\psi_{r+1} \quad \Rightarrow \quad R_0 = \frac{P_0}{\zeta_{\lambda+1}}\psi_{r+1}$$

بوضع $P_1 = \frac{P_0}{\zeta_{\lambda+1}}$ نجد:

$$R_0 = P_1\psi_{r+1} \qquad \& \qquad P_0 = P_1\zeta_{\lambda+1}$$

ومنه فإن كثيرات الحدود R, S, T, P تأخذ الشكل:

$$\begin{matrix} R = R_1\chi_{r_1+1}\zeta_{\lambda+1} & , & S = R_1\chi_{r_1+1}\xi_\lambda \\ T = R_1\zeta_{\lambda+1}\xi_\lambda & , & P = R_1\zeta_{\lambda+1}\chi_{r_1+2} \end{matrix} \qquad (3)$$

وينتج من (2) أيضاً أن:

$$\zeta_{\lambda+1} = c_1.\chi_{r_1+1} \ , \ \xi_\lambda = c_2\psi_{r+1} \ , \ \xi_{\lambda-1} = c_3.\chi_{r_1+2} \qquad (4)$$

نتيجة (1): تحقق الدوال ξ_λ , $\zeta_{\lambda+1}$, χ_{r_1+1} , ψ_{r+1} العلاقات (4)، ويمكن أن تعطى كثيرات الحدود R, S, T, P بالعلاقات (3).

الآن، لمزيد من الدراسة وبهدف تحديد المتراجحات الهندسية نفرض أن:

$$\Pi^g = \Pi^h \oplus \Pi^2(OZ_1, OZ_\lambda)$$

يمكن تعيين المستوي Π^h في المستوي Π^{r_1} بالمعادلات الآتية: [6]

$$\begin{aligned} Z_{h+\varepsilon} &= \sum_{p=1}^{h} a_{\varepsilon p} Z_p \quad ; \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda - h} \\ Z_{\lambda+j} &= \sum_{p=1}^{h} b_{jp} Z_p \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 1} \end{aligned} \tag{5}$$

حيث أن: $\sum_j b_{jp}^2 > 0$, $rang\|b_{jp}\| = h$

لنأخذ في المستوي Π^h محاور إحداثية جديدة OZ'_p، عندها، واستناداً إلى ماسبق، يمكن اعتماد دساتير التحويل:

$$\begin{aligned} Z_p &= Z'_p \quad ; \quad p = \overline{1, h} \\ Z_{h+\varepsilon} &= Z'_{h+\varepsilon} + \sum_{p=1}^{h} a_{\varepsilon p} Z'_p \quad ; \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda - h} \\ Z_{\lambda+j} &= Z'_{\lambda+j} + \sum_{p=1}^{h} b_{jp} Z'_p \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 1} \end{aligned} \tag{6}$$

فتأخذ معادلة السطح F_n في الجملة الجديدة الشكل:

$$R\left(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda-h}\xi_{h+i}Z'_{h+i}\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_{\lambda+j}Z'_{\lambda+j}\right)+$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{p=1}^{h}\chi_p Z'_p+\sum_{k=1}^{g-2}\chi_{r_1+k}Z_{r_1+k}\right)+$$

$$+P\left(y_4^2+\sum_{\ell=1}^{\mathrm{v}-1}\psi_{r+\ell}Z'_{r+\ell}\right)=c \qquad (7)$$

حيث χ_p دوال خطية في المتحولات $(\omega=\overline{1,\rho}\geq 2)$ x_ω ، كما أن χ_p و χ_{r_1+k} تشكل جملة مستقلة خطياً، كون السطح F_n ليس أسطوانياً، ويمكن أن تعطى بالشكل:

$$\chi_p=\lambda_0^{-1}\left(\xi_p+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-h}a_{\varepsilon p}\xi_{h+\varepsilon}\right)$$

$$=\lambda_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu-1}b_{jp}\zeta_j \qquad ;p=\overline{1,h} \qquad (8)$$

كما أن:

$$\psi_\ell=\mu_0^{-1}(\xi_{p-1}+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-h-1}a_{\varepsilon p}\xi_{h+\varepsilon})$$

$$=\mu_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu-1}b_{jp-1}\zeta_j \qquad , \quad \ell=\overline{1,v-1} \qquad (9)$$

حيث μ_0 ، μ_1 ، λ_0 و λ_1 وسطاء حقيقية اختيارية.

بتعويض قيم Z' في المعادلة الجديدة للسطح، والاستفادة من تعريف ψ_ℓ و χ_p نجد أن:

$$T = \lambda_0 R + \lambda_1 S \qquad (10)$$

$$P = \mu_0 R + \mu_1 T \qquad (11)$$

بالاستفادة من (2) و(10) نجد أن:

$$T_0 \xi_\lambda = \lambda_0 R_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$T_0 \xi_\lambda = R_0 (\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda}{\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda}$$

وأيضاً من جهة أخرى:

$$T_0 \xi_\lambda = \lambda_0 T_0 \chi_{r_1+1} + \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$T_0 \left(\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}\right) = \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}}{\lambda_1 \xi_\lambda}$$

ومنه:

$$\frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda}{\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda} = \frac{\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}}{\lambda_1 \xi_\lambda} = \frac{\chi_{r_1+1}}{\zeta_{\lambda+1}} \qquad (12)$$

نستنتج:

$$\xi_\lambda = a_1 (\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda) \ \Rightarrow$$

$$\xi_\lambda = \frac{a_1 \lambda_0}{1 - a_1 \lambda_1} \zeta_{\lambda+1} \ ; \ \ a_1 = \frac{\chi_{r_1+1}}{\zeta_{\lambda+1}} \qquad (13)$$

$$\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1} = a_1 \lambda_1 \xi_\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\xi_\lambda = \frac{\lambda_0}{1 - a_1 \lambda_1} \chi_{r_1+1} \tag{14}$$

$$\chi_{r_1+1} = a_1 \zeta_{\lambda+1} \tag{15}$$

نتيجة (2): تحقق الدالتان χ_{r_1+1} و $\zeta_{\lambda+1}$ العلاقة (15) ، وترتبطان خطياً مع الدالة ξ_λ بالعلاقتين (13) و (14).

بالعودة إلى (11) والاستفادة من (2) نجد:

$$P_0 \xi_{\lambda-1} = \mu_0 P_0 \psi_{r+1} + \mu_1 T_0 \psi_{r+1}$$

$$P_0 (\xi_{\lambda-1} - \mu_0 \psi_{r+1}) = \mu_1 T_0 \psi_{r+1}$$

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{\mu_1 \psi_{r+1}}{\xi_{\lambda-1} - \mu_0 \psi_{r+1}}$$

ومن جهة أخرى:

$$T_0 \chi_{r_1+2} = \mu_0 P_0 \psi_{r+1} + \mu_1 T_0 \psi_{r+1}$$

$$T_0 \left(\chi_{r_1+2} - \mu_1 \psi_{r+1}\right) = \mu_0 P_0 \psi_{r+1}$$

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{\chi_{r_1+2} - \mu_1 \psi_{r+1}}{\mu_0 \psi_{r+1}}$$

ومنه:

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{\mu_1 \psi_{r+1}}{\xi_{\lambda-1} - \mu_0 \psi_{r+1}} = \frac{\chi_{r_1+2} - \mu_1 \psi_{r+1}}{\mu_0 \psi_{r+1}} = \frac{\chi_{r_1+2}}{\xi_{\lambda-1}} \tag{16}$$

نستنتج بعد وضع $a_2 = \frac{\chi_{r_1+2}}{\xi_{\lambda-1}}$:

$$\mu_1\psi_{r+1} = a_2(\xi_{\lambda-1} - \mu_0\psi_{r+1})$$

$$\psi_{r+1}(\mu_1 + a_2\mu_0) = a_2\xi_{\lambda-1}$$

$$\psi_{r+1} = \frac{a_2}{\mu_1 + a_2\mu_0}\xi_{\lambda-1} \qquad (17)$$

$$\chi_{r_1+2} - \mu_1\psi_{r+1} = a_2\mu_0\psi_{r+1}$$

$$\chi_{r_1+2} = (\mu_1 + a_2\mu_0)\psi_{r+1}$$

$$\psi_{r+1} = \frac{1}{\mu_1 + a_2\mu_0}\chi_{r_1+2} \qquad (18)$$

$$\chi_{r_1+2} = a_2\xi_{\lambda-1} \qquad (19)$$

نتيجة (3): تحقق الدالتان χ_{r_1+2} و $\xi_{\lambda-1}$ العلاقة (19)، وترتبطان خطياً مع الدالة ψ_{r+1} بالعلاقتين (17) و (18).

لإيجاد علاقات كثيرات الحدود بالدوال الخطية ننطلق من (12)، فنجد:

$$R_0 = R_1\xi_\lambda$$

$$T_0 = R_1(\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda) \qquad ; \qquad R_1 = \frac{T_0}{\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda}$$

نعوض في (2) نجد:

$$\begin{aligned} R &= R_1\xi_\lambda\zeta_{\lambda+1} \\ S &= R_1\xi_\lambda^2 \\ T &= R_1(\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda)\xi_\lambda \\ P &= R_1(\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda)\chi_{r_1+2} \end{aligned} \qquad (20)$$

مبرهنة 1: عندما تتقاطع الأغلفة الخطية الأربعة وفق الآتي:

$$\Pi^{\lambda} \cap \Pi^{\mu} \cap \Pi^{\nu} = OZ_1$$

$$\Pi^{\lambda} \cap \Pi^{\nu} \cap \Pi^{\mathrm{v}} = OZ_{\lambda}$$

وبفرض أن $\mathrm{v} \geq \mathrm{v}_2 > 0$ $(\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_3 = 0)$ فإن السطح F_n يتعين بالمعادلة (7)، وعندها تعطى الدوال الخطية ψ_{ℓ}, χ_p بالعلاقتين (8) و(9) ، وتحقق كثيرات الحدود R, S, T, P العلاقات (20).

ثانياً: دراسة حالة $\mathbf{v} = \mathbf{v_2}$

بفرض أن $\mathrm{v} = \mathrm{v}_2$ $(\Pi^{\mathrm{v}} \subset \Pi^{r_2})$، وباختيار مناسب للجملة الإحداثية $OZ_i(i = \overline{1, \lambda - 2})$ يمكن تعيين المستوي Π^{v} في Π^{r_1} بالعلاقات:

$$Z'_p = 0 \qquad ; \qquad p = \overline{1, h-1}$$

$$Z'_{h+\mathrm{v}-1+\sigma} = \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} C_{\sigma q} Z'_{h+q} \quad ; \quad \sigma = \overline{1, \lambda - h + 1 - \mathrm{v}} \qquad (21)$$

$$Z'_{\lambda+j} = \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} d_{jq} Z'_{h+q} \qquad ; \qquad j = \overline{1, \mu - 1}$$

حيث $\sum_{\mathrm{j}} \mathrm{d}_{\mathrm{jq}}^2 > 0$, $rang\,\|d_{jq}\| = \mathrm{v} - 1$

إذا ما اخترنا في المستوي Π^{v} محاور إحداثية جديدة OZ''_{h+q} ، يمكن الحصول على دساتير تحويل الإحداثيات في المستوي Π^{r_1} بالعلاقات:

$$
\begin{aligned}
&Z'_p = 0 \qquad ; \qquad p = \overline{1, h-1} \\
&Z'_{h+q} = Z''_{h+q} \qquad ; \qquad q = \overline{1, \mathrm{v}-1} \\
&Z'_{h+\mathrm{v}-1+\sigma} = Z''_{h+\mathrm{v}-1+\sigma} + \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} C_{\sigma q} Z''_{h+q} \; ; \; \sigma = \overline{1, \lambda-h-\mathrm{v}+2} \\
&Z'_{\lambda+j} = Z''_{\lambda+j} + \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} d_{jq} Z''_{h+q} \qquad ; \; j = \overline{1, \mu-1}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

فتأخذ معادلة السطح F_n في الجملة الجديدة الشكل:

$$
\begin{aligned}
&R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda-h-\mathrm{v}+2} \xi_{h+\mathrm{v}-2+i} Z''_{h+\mathrm{v}-2+i}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z''_{\lambda+j}\right) + \\
&+T\left(y_3^2 + \sum_{p=1}^{h-1} \chi_p Z''_p + \sum_{k=1}^{g-1} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k}\right) + \\
&+P\left(y_4^2 + \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} \psi_{r+q} Z''_{r+q}\right) = c
\end{aligned}
\tag{23}
$$

حيث ψ_q دوال خطية في المتحولات x_ω ، ويمكن تعيينها بالعلاقات:

$$
\begin{aligned}
\psi_q &= h_0^{-1}\left(\xi_{h+q} + \sum_{\sigma=1}^{\lambda-h-\mathrm{v}} C_{\sigma q} \xi_{h+\mathrm{v}-2+\sigma}\right) \\
&= h_1^{-1} \sum_{j=1}^{\mu-1} d_{jq} \zeta_j \quad ; \quad q = \overline{1, \mathrm{v}-1}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

حيث h_0 و h_1 وسيطان حقيقيان، وبالتالي:

$$P = h_0R + h_1S \qquad (25)$$

يتعلق اختيار الدوال ψ_q ، إلى حدّ ما، بالدوال χ_p ، ولا تتحقق المساواتان

$$h_0 = c\lambda_0 \quad , \quad h_1 = c\lambda_1$$

في آن معاً، مما يفرض شروطاً إضافية على اختيار مجموعة مستويات تناظر السطح F_n ، الموافقة لمناحي المستوي Π^{v}.

إن إيجاد الدوال χ_p و ψ_q بالعلاقات (8) و (24) ، يفرض شرطاً إضافياً إلى الشرط

$$h + \mathrm{v} \le \lambda$$

وهو أن يكون

$$h + \mathrm{v} \le \mu$$

بهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة2: إذا كان $\mathrm{v} = \mathrm{v}_2$ وكانت الدوال χ_p و ψ_q معرفة بالعلاقات (8) و (24)، فإن تموضع الغلاف $\Pi^{\mathrm{v}-1}$ يكون عشوائياً ($\Pi^{\mathrm{v}-1} = F\Pi^{\mathrm{v}-1}$) إذا تحققت المتراجحة الهندسية

$$h + \mathrm{v} \le \mu \le \lambda$$

حين يتعين السطح F_n بالمعادلة (23).

التوصيات:

وفقاً لهذا السياق، نوصي بدراسة باقي حالات تشكل مستقيمات التقاطع المضاعفة، من أجل استنتاج المتراجحات الهندسية الموافقة، وتعيين معادلات السطوح الجبرية في كل حالة على حدة، بُغية استنتاج الشروط النهائية للتموضع المتبادل لهذه الأغلفة الخطية.

المراجع

1. د.عصام ديبان – التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، 1999،مجلة جامعة البعث، المجلد (21) العدد (3).

2. د.عصام ديبان – تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي E^m (I) ، 2007، مجلة جامعة البعث، المجلد (29) العدد (9).

3. د.عصام ديبان – تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي E^m (II)، 2011، مجلة جامعة البعث، المجلد (33).

4. د.عصام ديبان، حنان ابراهيم– التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، والمتقاطعة بأربعة مستقيمات شكلت مستقيمين مضاعفين(I)، 2022، مجلة جامعة البعث، المجلد (44) (قيد النشر).

5. Игнатенко В.Ф.,1989– Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. I // Симфероп.ун–т; Симферополь,32с.–Библ.4 назв.– Рус.– Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89.№ 2373 –Ук.89.

6. ИгнатенкоВ.Ф.,1980–геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.–М.: Наука,Т.11,с.203–240

7. ИгнатенкоВ.Ф.,1984–Некоторые вопросы геометрический теории инваринтов групп, порожденных отражениями (ортогональными и косыми)// Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.,–М.: Наука,Т.16.– с.915–229.

8. Игнатенко В.Ф.,1989– Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.II// Симфероп. ун–т; Симферополь,34с.–Библ.5 назв.– Рус.– Деп. вУкрНИИНТИ 19.02.90.№ 224 –Ук.90.

9. Дибан Иссам, 1991– Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.IV// Симфероп. ун–т; Симферополь,22с.–Библ.3 назв.– Рус.– Деп. в УкрНИИНТИ 17.02.92.№ 192 –Ук.92.

10. Дибан Иссам, 1992–Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.V// Симфероп. ун-т; Симферополь, 66с.–Библ.4 назв.– Рус.– Деп. в УкрИНТЭИ 17.09.92.№224–Ук.92.

11. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. // Междупародная научная конференция "Лобачевский и современная геометрия"; Казань, август, 1992. –С.35.

12. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. // Динам. Системы.– 1993. Вып.