حلقة الإندومورفيزمات المنتظمة

إيمان الخوجة[1] حمزة حاكمي[2] رنيم الجندي[3]

الملخص

يعد مفهوم الانتظام بحسب مفهوم فون نيومان، من المفاهيم المهمة في نظرية الحلقات والمودولات. حيث إن مفهوم الانتظام لعناصر الحلقة مرتبط بشكل وثيق بالعناصر الجامدة في هذه الحلقة، حيث إن كل عنصر جامد هو عنصر منتظم وأن كل عنصر منتظم يولد عنصر جامد في الحلقة.

ونظراً لأهمية مفهوم انتظام حلقة الإندومورفيومات لمودول ما، وجدنا أنه من المفيد دراسة بنية المثاليات الرئيسية اليمينية (اليسارية) لحلقة الإندومورفيزمات للمودول. ولهذا السبب درسنا في هذه الورقة العلمية عدد من الشروط اللازمة والكافية كي تكون حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما، حلقة منتظمة وقد حصلنا على شروط مكافئة عديدة وجديدة كي تكون حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما، حلقة منتظمة. نذكر منها على سبيل المثال أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة S منتظمة هو أن يكون كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M، وذلك لأجل كل عنصر $\alpha \in S$. والذي يكافئ بدوره أن كل من $Im(\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M، وذلك لأجل كل عنصر $\alpha \in S$. إضافة إلى عدد من الشروط المكافئة الأخرى لهذا الشرط. فضلاً عن ذلك، أثبتنا أن الحلقة S منتظمة عندما وفقط عندما لأجل كل عنصر $\alpha \in S$ يوجد عنصر $\beta \in S$ بحيث إن $\alpha S \cap (1-\alpha\beta)S = 0$. والذي يكافئ بدوره أنه لأجل كل $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $Im(\alpha) \cap Im(1-\alpha\beta) = 0$.

الكلمات المفتاحية. العنصر الجامد، العنصر المنتظم، الحلقة المنتظمة.
رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 16D10, 16D40, 16D80, 16D90.

---

[1] أستاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.
[2] أستاذ قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.
[3] طالب دراسات عليا فسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

Regular Endomorphism Rings

Eaman Al-Khouja[1] Hamza Hakmi[2] Raneem Al-Jendi[3]

Abstract

The concept of regularity in the sense Von Neumann it is one of the important concepts in theory rings and modules. The concept of regularity to elements of ring has a strong relation with the idempotents elements of this ring, where every idempotent element is regular element and every regular element generate an idempotent element, in any ring.

Conceder to the importance of the regularity of endomorphisms ring of some module, we find that it is good studying the structure of right (left) principal ideals of endomorphism ring of module. For this reason we study in this scientific paper a lot of necessary and sufficient conditions, to be the endomorphisms ring for some module is regular ring. Where we have obtain of many and new equivalently conditions to be the endomorphism ring for some module is regular ring.

We mention from, the endomorphism ring of a module M is regular if and only if $Im(1-\alpha)$ and $Ker(1-\alpha)$ are a direct summands of a module M, for every endomorphism α of M. In addition to that, we obtain of many conditions equivalently of this condition. Also, we proved that if S is the endomorphism ring of some module M, then S is regular if and only if for every element $\alpha \in S$ there exists $\beta \in S$ such that $\alpha S \cap (1-\alpha\beta)S = 0$, which is equivalent with the condition for every element $\alpha \in S$ there exists $\beta \in S$ such that $Im(\alpha) \cap Im(1-\alpha\beta) = 0$.

Key Words: Idempotent element, Regular element, Regular ring.

2020 **Mathematical Subject Classification:** 16D10,16D40,16D80,16D90.

[1] Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.

[2] Professor, Department of Mathematics Damascus University.

[3] Department of Mathematics Al-Baath University.

المقـــــدمـــــة.

لقد ثبت في كثير من الحالات الأهمية الكبرى لمفهوم الانتظام بحسب مفهوم فون نيومان في نظرية الحلقات والمودولات. حيث إن مفهوم الانتظام لعناصر الحلقة مرتبط بشكل وثيق بالعناصر الجامدة في هذه الحلقة، حيث إن كل عنصر جامد هو عنصر منتظم وأن كل عنصر منتظم يولد عنصر جامد في الحلقة.

إضافة لذلك، إن مفهوم الانتظام يربط لنا بين المودول وحلقة الإندومورفيزمات له، حيث إن الشرط اللازم والكافي كي تكون حلقة الإندومورفيزمات $S = End_R(M)$ لمودول ما M فوق حلقة R، حلقة منتظمة هو أن يكون كل من $Im(\alpha)$ و $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M، وذلك لأجل كل $\alpha \in S$.

ومن جهة أخرى، توجد علاقة وثيقة بين المثاليات الرئيسية اليمينية (اليسارية) في حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما وبين المودولات الجزئية لهذا المودول، وذلك من خلال مفهوم الانتظام.

فضلاً عن ذلك، إن مفهوم الانتظام يعد واحداً من المفاهيم التي تربط بين الحلقة والمودولات فوق هذه الحلقة، وحلقة الإندومورفيزمات لهذه المودولات. حيث أثبت R. Ware في [7]، أن الشرط اللازم والكافي كي تكون حلقة ما نصف بسيطة هو أن تملك مودولاً حراً غير منتهي التوليد، حلقة الإنومورفيزمات له حلقة منتظمة.

ونظراً لأهمية مفهوم انتظام حلقة الإندومورفيومات لمودول ما، وجدنا أنه من المفيد دراسة بنية المثاليات الرئيسية اليمينية (اليسارية) لحلقة الإندومورفيزمات للمودول. ولهذا السبب درسنا في هذه الورقة العلمية عدد من الشروط اللازمة والكافية كي تكون حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما، حلقة منتظمة وقد حصلنا على شروط مكافئة عديدة وجديدة كي تكون حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما، حلقة منتظمة.

الهـــدف مــن البحــــــث.

الهدف من هذا البحث هو دراسة بنية حلقة الإندومورفيزمات $S = End_R(M)$ لمودول ما M فوق حلقة R، وبالتحديد دراسة بنية المثاليات الرئيسية اليسارية (اليمينية) في الحلقة S، كي تكون الحلقة S منتظمة وبالعكس. حيث تم التوصل إلى عدد من الشروط اللازمة والكافية التي يجب أن تحققها المثاليات الرئيسية اليسارية (اليمينية) في الحلقة S، كي تكون حلقة منتظمة. فضلاً عن ذلك، تم التوصل إلى عدد من الشروط اللازمة والكافية التي يجب أن تحققها بعض المودولات الجزئية في المودول M، كي تكون الحلقة S منتظمة. حيث تم إثبات أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة S منتظمة هو أن يكون كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M، وذلك لأجل كل عنصر $\alpha \in S$. إضافة إلى عدد من الشروط المكافئة الأخرى لهذا الشرط.

1 – الــدراســــة المــرجعيــــة.

جميع الحلقات R التي سندرسها هي حلقات واحدية فيها $1 \neq 0$ والمودولات فوق هذه الحلقات هي مودولات يمينية. لأجل أي مودول M فوق حلقة R سنرمز لحلقة الإندومورفيزمات للمودول M بالشكل $S = End_R(M)$. ليكن M_R, N_R مودولين فوق حلقة R. لنفرض أن $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$، لنفرض أيضاً أن:

$$[M,N] = Hom_R(M,N)$$

إن المجموعة $[M,N]$ تشكل زمرة جمعية تبديلية وهذه الزمرة تشكل مودولاً يسارياً فوق الحلقة E_N وتشكل أيضاً مودولاً يمينياً فوق الحلقة E_M، لذلك فإن الزمرة $[M,N]$ هي (E_N, E_M)–مودول ثنائي، [4].

تمهيديــــــة 1-1 [3].

ليكن M_R, N_R مودولين فوق حلقة R. عندئذ أياً كان $\alpha \in [M,N]$ فإن:

1 – المجموعة $\alpha[N,M] = \{\alpha\beta :\ \beta \in [N,M]\}$ تشكل مثالياً يمينياً في الحلقة E_N.

2 – المجموعة $[N,M]\alpha=\{\beta\alpha:\ \beta\in[N,M]\}$ تشكل مثالياً يسارياً في الحلقة E_M.

1-2. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $a\in R$ إنه منتظم إذا وجد عنصر $b\in R$ يحقق $a=aba$. ونقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كانت جميع عناصرها منتظمة، [2].

1-3. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $e\in R$ إنه جامد إذا كان $e^2=e$، [6].

1-4. ليكن M,N مودولين فوق حلقة R. نقول عن العنصر $\alpha\in[M,N]$ إنه منتظم إذا وجد عنصر $\beta\in[N,M]$ بحيث إن $\alpha=\alpha\beta\alpha$، ونقول عن المودول $[M,N]$ إنه منتظم إذا كان كل عنصر $\alpha\in[M,N]$ هو عنصر منتظم، [1].

مبرهنـــــــة 1-5 [5].

ليكن M_R,N_R مودولين فوق حلقة R، عندئذ لأجل أي عنصر $\alpha\in[M,N]$. الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – العنصر $\alpha\in[M,N]$ منتظم.

2 – $Im(\alpha)$ هو حد مباشر في N و $Ker(\alpha)$ هو حد مباشر في M.

نتيجـــة 1-6 [5].

ليكن M_R مودولاً وليكن $\alpha\in S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – يوجد $\beta\in S$ بحيث يكون $\alpha=\alpha\beta\alpha$.

2 – كل من $Im(\alpha),\ Ker(\alpha)$ هو حد مباشر في M.

مبرهنة 1-7 [7].

ليكن M_R مودولاً وليكن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة S منتظمة.

2 – لأجل كل $\alpha\in S$، كلاً من $Im(\alpha),\ Ker(\alpha)$ هو حد مباشر في M.

الـــدراســــــة البحثيـــــــة.

2 – حــلقـــــة الإندومورفيــزمــــــات لمـــــودول.

تمهيديـــــة 2–1.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. لأجل كل من $\alpha \in [M, N]$ و $\beta \in [N, M]$ القضايا الآتية صحيحة:

1 – $N = Im(\alpha) + Im(1_N - \alpha\beta)$.

2 – $M = Im(\beta) + Im(1_M - \beta\alpha)$.

3 – $Im(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta)$.

4 – $Ker(\alpha) \cap Ker(1_M - \beta\alpha) = 0$.

5 – $Ker(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Ker(\alpha) + Ker(1_M - \beta\alpha)$.

البرهـــــــان.

لما كان $\alpha \in [M, N]$ و $\beta \in [N, M]$، عندئذ فإن $\alpha\beta \in E_N$ وأن $\beta\alpha \in E_M$.

1 – لما كان $1_N = \alpha\beta + (1_N - \alpha\beta)$، عندئذ أياً كان $m \in N$ فإن:

$$m = \alpha\beta(m) + (1_N - \alpha\beta)(m) \in Im(\alpha) + Im(1_N - \alpha\beta)$$

ومنه فإن $N \subseteq Im(\alpha) + Im(1_N - \alpha\beta) \subseteq N$ وهذا يبين أن:

$$N = Im(\alpha) + Im(1_N - \alpha\beta)$$

2 – يبرهن بطريقة مشابهة كما في (1).

3 – ليكن $x \in Im(\alpha - \alpha\beta\alpha)$، عندئذ يوجد $y \in M$ بحيث $x = (\alpha - \alpha\beta\alpha)(y)$،

ومنه فإن $x = (\alpha - \alpha\beta\alpha)(y) = \alpha(1_N - \beta\alpha)(y) \in Im(\alpha)$، وبالتالي يكون:

$$x = (\alpha - \alpha\beta\alpha)(y) = (1_N - \alpha\beta)\alpha(y) \in Im(1_N - \alpha\beta)$$

ومنه فإن $Im(\alpha - \alpha\beta\alpha) \subseteq Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta)$.

ليكن $m \in Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta)$، عندئذ يوجد $m_1 \in M$ و $m_2 \in N$ بحيث:

$$m=\alpha(m_1)=(1_N-\alpha\beta)(m_2)$$

ومنه فإن $\alpha(m_1)=m_2-\alpha\beta(m_2)$ وبالتالي فإن $\alpha(m_1)+\alpha\beta(m_2)=m_2$ وهكذا نجد أن $m_2=\alpha(m_1+\beta(m_2))$.

لنفرض أن $m_0=m_1+\beta(m_2)$، فنجد أن $m_2=\alpha(m_0)$ ومنه نجد أن:

$$m=(1_N-\alpha\beta)(m_2)=(1_N-\alpha\beta)(\alpha(m_0))=$$
$$=(\alpha-\alpha\beta\alpha)(m_0)\in Im(\alpha-\alpha\beta\alpha)$$

وهكذا فإن $Im(\alpha)\cap Im(1_N-\alpha\beta)\subseteq Im(\alpha-\alpha\beta\alpha)$. مما سبق نجد أن:

$$Im(\alpha-\alpha\beta\alpha)=Im(\alpha)\cap Im(1_N-\alpha\beta)$$

4 – ليكن $y\in Ker(\alpha)\cap Ker(1_M-\beta\alpha)$، عندئذ فإن $y\in M$ كما أن:

$$\alpha(y)=0 \text{ و } (1_M-\beta\alpha)(y)=0$$

ومنه فإن $y=\beta\alpha(y)=\beta(0)=0$ وبالتالي $Ker(\alpha)\cap Ker(1_M-\beta\alpha)=0$.

5 – ليكن $x\in Ker(\alpha)$، عندئذ فإن $x\in M$ وأن $\alpha(x)=0$ ومنه فإن:

$$(\alpha-\alpha\beta\alpha)(x)=(1_N-\alpha\beta)\alpha(x)=(1_N-\alpha\beta)(0)=0$$

ومنه فإن $x\in Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)$، وبالتالي فإن $Ker(\alpha)\subseteq Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)$.

ليكن $y\in Ker(1_M-\beta\alpha)$، عندئذ فإن $Ker(1_M-\beta\alpha)(y)=0$، ومنه فإن:

$$(\alpha-\alpha\beta\alpha)(y)=\alpha(1_M-\beta\alpha)(y)=\alpha(0)=0$$

ومنه $y\in Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)$. وهكذا نجد أن $Ker(1_M-\beta\alpha)\subseteq Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)$.

مما سبق نجد أن $Ker(\alpha)+Ker(1_M-\beta\alpha)\subseteq Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)$.

ليكن $y\in Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)$، عندئذ $y\in M$ وأن $Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)(y)=0$، ومنه نجد أن $\alpha(1_M-\beta\alpha)(y)=0$ وبالتالي فإن $(1_M-\beta\alpha)(y)\in Ker(\alpha)$ ومنه يوجد $y_0\in Ker(\alpha)$ بحيث إن $y-\beta\alpha(y)=y_0$، وهذا يبين أن $y=y_0+\beta\alpha(y)$.

فضلاً عن ذلك، إن:

$$(1_M-\beta\alpha)\beta\alpha(y)=(\beta\alpha-\beta\alpha\beta\alpha)(y)=\beta(\alpha-\alpha\beta\alpha)(y)=\beta(0)=0$$

ومنه فإن $\beta\alpha(y) \in Ker(1_M - \beta\alpha)$ ، ومنه نجد أن:

$$y = y_0 + \beta\alpha(y) \in Ker(\alpha) + Ker(1_M - \beta\alpha)$$

وبالتالي فإن $Ker(\alpha - \alpha\beta\alpha) \subseteq Ker(\alpha) + Ker(1_M - \beta\alpha)$ ، وهكذا نجد أن:

$$Ker(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Ker(\alpha) + Ker(1_M - \beta\alpha)$$

وهو المطلوب.

اعتماداً على التمهيدية $(2-1)$ يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــــة 2-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R . عندئذ لأجل أي عنصرين $\alpha, \beta \in S = End_R(M)$ القضايا الآتية صحيحة:

1 - $M = Im(\alpha) + Im(1 - \alpha\beta)$.

2 - $Im(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Im(\alpha) \cap Im(1 - \alpha\beta)$.

3 - $Ker(\alpha) \cap Ker(1 - \beta\alpha) = 0$.

4 - $Ker(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Ker(\alpha) + Ker(1 - \beta\alpha)$.

تمهيديـــــة 2-3.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R . لأجل كل من $\alpha \in [M, N]$ و $\beta \in [N, M]$ القضايا الآتية صحيحة:

1 - $E_N = \alpha[N, M] + (1_N - \alpha\beta)E_N$.

2 - $(\alpha - \alpha\beta\alpha)[N, M] = \alpha[N, M] \cap (1_N - \alpha\beta)E_N$.

3 - $[M, N] = \alpha E_M + (1_N - \alpha\beta)[M, N]$.

البرهـــــــان.

لما كان $\alpha \in [M,N]$ و $\beta \in [N,M]$، عندئذ فإن $\alpha\beta \in E_N$ وأن $\beta\alpha \in E_M$.

1 – لما كان $\alpha\beta \in E_N$ فإن $1_N = \alpha\beta + (1_N - \alpha\beta)$، ومنه فإن:

$$1_N \in \alpha[N,M] + (1_N - \alpha\beta)E_N$$

وهذا يبين أن $E_N \subseteq \alpha[N,M] + (1_N - \alpha\beta)E_N \subseteq E_N$ وهكذا فإن:

$$E_N = \alpha[N,M] + (1_N - \alpha\beta)E_N$$

2 – أياً كان $\mu \in [N,M]$ فإن:

$$(\alpha - \alpha\beta\alpha)\mu = \alpha(1_M - \beta\alpha)\mu \in \alpha[N,M]$$

$$(\alpha - \alpha\beta\alpha)\mu = \alpha\mu - \alpha\beta\alpha\mu = (1_N - \alpha\beta)\alpha\mu \in (1_N - \alpha\beta)E_N$$

ومنه فإن:

$$(\alpha - \alpha\beta\alpha)[N,M] \subseteq \alpha[N,M] \cap (1_N - \alpha\beta)E_N$$

ليكن $\lambda \in \alpha[N,M] \cap (1_N - \alpha\beta)E_N$، عندئذ $\lambda \in E_N$، فضلاً عن ذلك، يوجد $\lambda_1 \in [N,M]$ و $\lambda_2 \in E_N$ بحيث إن $\lambda = \alpha\lambda_1 = (1_N - \alpha\beta)\lambda_2$ وبالتالي يكون:

$$\lambda_2 = \alpha\lambda_1 + \alpha\beta\lambda_2 = \alpha(\lambda_1 + \beta\lambda_2)$$

لنفرض أن $\lambda_0 = \lambda_1 + \beta\lambda_2 \in [N,M]$، عندئذ $\lambda_2 = \alpha(\lambda_1 + \beta\lambda_2) = \alpha\lambda_0$ ومنه نجد أن:

$$\lambda = (1_N - \alpha\beta)\lambda_2 = \alpha\lambda_0 = (\alpha - \alpha\beta\alpha)\lambda_0 \in (\alpha - \alpha\beta\alpha)[N,M]$$

ومنه فإن $\alpha[N,M] \cap (1_N - \alpha\beta)E_N \subseteq (\alpha - \alpha\beta\alpha)[N,M]$. مما سبق نجد أن:

$$(\alpha - \alpha\beta\alpha)[N,M] = \alpha[N,M] \cap (1_N - \alpha\beta)E_N$$

3 – لما كان $\alpha\beta \in E_N$ فإن $1_N = \alpha\beta + (1_N - \alpha\beta)$، ومنه أياً كان $\mu \in [M,N]$ فإن $\mu = \alpha(\beta\mu) + (1_N - \alpha\beta)\mu \in \alpha E_M + (1_N - \alpha\beta)[M,N]$ ، ومنه فإن:

$$[M,N] \subseteq \alpha E_M + (1_N - \alpha\beta)[M,N] \subseteq [M,N]$$

مما سبق نجد أن $[M,N]=\alpha E_M+(1_N-\alpha\beta)[M,N]$.

اعتماداً على التمهيدية (2−3) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــــة 2−4.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. عندئذ لأجل أي عنصرين $\alpha,\beta\in S=End_R(M)$ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 − $S=\alpha S+(1-\alpha\beta)S$.

2 − $(\alpha-\alpha\beta\alpha)S=\alpha S\cap(1-\alpha\beta)S$.

تمهيديـــــة 2−5.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R. لأجل كل من $\alpha\in[M,N]$ و $\beta\in[N,M]$ القضايا الآتية صحيحة:

1 − $E_M=[N,M]\alpha+E_M(1_M-\beta\alpha)$.

2 − $[N,M](\alpha-\alpha\beta\alpha)=[N,M]\alpha\cap E_M(1_M-\beta\alpha)$.

3 − $[M,N]=E_N\alpha+[M,N](1_M-\beta\alpha)$.

البرهـــــان.

يتم بطريقة مشابه كما في التمهيدية (2−3).

اعتماداً على التمهيدية (2−5) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــــة 2−6.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. عندئذ لأجل أي عنصرين $\alpha,\beta\in S=End_R(M)$ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 − $S=S\alpha+S(1-\beta\alpha)$.

2 − $S(\alpha-\alpha\beta\alpha)=S\alpha\cap S(1-\beta\alpha)$.

3. حلقـــة الإندومـورفيـــزمات المنتظمـــة.

مبرهنـــــة 3-1.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. عندئذ لأجل أي عنصر $\alpha \in [M, N]$ القضايا الآتية متكافئة:

1 – العنصر α منتظم.

2 – يوجد عنصر $\beta \in [N, M]$ بحيث يكون $N = Im(\alpha) \oplus Im(1_N - \alpha\beta)$.

3 – يوجد عنصر $\beta \in [N, M]$ بحيث يكون $Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta) = 0$.

4 – يوجد عنصر $\beta \in [N, M]$ بحيث يكون $M = Ker(\alpha) \oplus Ker(1_M - \beta\alpha)$.

البرهـــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن $\alpha \in [M, N]$ عنصر منتظم، عندئذ يوجد $\beta \in [N, M]$ بحيث $\alpha = \alpha\beta\alpha$، وحسب التمهيدية (2-1) نجد أن $N = Im(\alpha) + Im(1_N - \alpha\beta)$ وأن:

$$Im(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta)$$

ولما كان $\alpha = \alpha\beta\alpha$ نجد أن $Im(\alpha - \alpha\beta\alpha) = 0$ ومنه نجد أن:

$$Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta) = 0$$

وهذا يبين أن $N = Im(\alpha) \oplus Im(1_N - \alpha\beta)$.

$(2) \Rightarrow (3)$. واضح.

$(3) \Rightarrow (1)$. لنفرض أنه يوجد $\beta \in [N, M]$ بحيث إن:

$$Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta) = 0$$

حسب التمهيدية (2-1) لدينا $Im(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta) = 0$ ومنه فإن $\alpha = \alpha\beta\alpha$ وهذا يبين أن العنصر α منتظم.

$(1) \Rightarrow (4)$. لنفرض أن العنصر $\alpha \in [M, N]$ منتظم، عندئذ يوجد $\beta \in [N, M]$ بحيث يكون $\alpha = \alpha\beta\alpha$، ومنه فإن $\alpha - \alpha\beta\alpha = 0$ وبالتالي $Ker(\alpha - \alpha\beta\alpha) = M$.

من جهة أخرى، لما كان $\alpha \in [M,N]$ و $\beta \in [N,M]$ فإنه حسب التمهيدية $(2-1)$ فإن $Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)=Ker(\alpha)+Ker(1_M-\beta\alpha)$ وأن:

$$Ker(\alpha)\cap Ker(1_M-\beta\alpha)=0$$

ومنه فإن $M=Ker(\alpha)\oplus Ker(1_M-\beta\alpha)$.

$(4)\Leftarrow(1)$. لنفرض أنه يوجد $\beta \in [N,M]$ بحيث يكون:

$$M=Ker(\alpha)\oplus Ker(1_M-\beta\alpha)$$

ولما كان $\alpha \in [M,N]$ و $\beta \in [N,M]$ فإنه حسب التمهيدية $(2-1)$ فإن:

$$Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)=Ker(\alpha)+Ker(1_M-\beta\alpha)$$

ومنه نجد أن $Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)=M$ وهذا يبين أن $\alpha=\alpha\beta\alpha$ ومنه فإن العنصر α منتظم.

اعتماداً على المبرهنة $(3-1)$ يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجــــــة 3-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

1 – الحلقة S منتظمة.

2 – لأجل كل $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $M=Im(\alpha)\oplus Im(1-\alpha\beta)$.

3 – لأجل كل $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $Im(\alpha)\cap Im(1-\alpha\beta)=0$.

4 – لأجل كل $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $M=Ker(\alpha)\oplus Ker(1-\beta\alpha)$.

مبرهنـــــة 3-3.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر $\alpha \in S$ القضايا الآتية متكافئة:

1 – العنصر α منتظم.

2 – يوجد عنصر $\beta \in S$ بحيث يكون $S = \alpha S \oplus (1-\alpha\beta)S$.

3 – يوجد عنصر $\beta \in S$ بحيث يكون $\alpha S \cap (1-\alpha\beta)S = 0$.

4 – يوجد عنصر $\beta \in S$ بحيث يكون $S = S\alpha \oplus S(1-\beta\alpha)$.

5 – يوجد عنصر $\beta \in S$ بحيث يكون $S\alpha \cap S(1-\beta\alpha) = 0$.

البرهـــــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن العنصر $\alpha \in S$ منتظم، عندئذ يوجد عنصر $\beta \in S$ بحيث إن $\alpha = \alpha\beta\alpha$، ولما كان $1 = \alpha\beta + (1-\alpha\beta) \in \alpha S + (1-\alpha\beta)S$ نجد أن:

$$S = \alpha S + (1-\alpha\beta)S$$

ليكن $\lambda \in \alpha S \cap (1-\alpha\beta)S$، عندئذ $\lambda \in S$، كما أنه يوجد $\lambda_1, \lambda_2 \in S$ بحيث يكون $\lambda = \alpha\lambda_1 = (1-\alpha\beta)\lambda_2$، ولما كان $\alpha = \alpha\beta\alpha$ نجد أن:

$$\lambda = \alpha\lambda_1 = \alpha\beta\alpha\lambda_1 = \alpha\beta(1-\alpha\beta)\lambda_2 = (\alpha\beta - \alpha\beta\alpha\beta)\lambda_2 =$$
$$= (\alpha\beta - \alpha\beta)\lambda_2 = 0$$

ومنه نجد أن $\alpha S \cap (1-\alpha\beta)S = 0$، وهذا يبين أن $S = \alpha S \oplus (1-\alpha\beta)S$.

$(2) \Rightarrow (3)$. واضح.

$(3) \Rightarrow (1)$. لنفرض أنه يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $\alpha S \cap (1-\alpha\beta)S = 0$، وحسب التمهيدية (2–3) ولأجل $M = N$ نجد أن $(\alpha - \alpha\beta\alpha)S = \alpha S \cap (1-\alpha\beta)S$، ومنه نجد أن $(\alpha - \alpha\beta\alpha)S = 0$ وبالتالي فإن $\alpha = \alpha\beta\alpha$ وهذا يبين أن العنصر α منتظم.

التكافؤ $(1) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$ يبرهن بطريقة مشابهة للتكافؤ $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.

نتيجـــــة 3–4.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

1 – الحلقة S منتظمة.

2 – لأجل كل عنصر $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $S = \alpha S \oplus (1-\alpha\beta)S$.

3 – لأجل كل عنصر $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $\alpha S \cap (1-\alpha\beta)S = 0$.

4 – لأجل كل عنصر $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $S = S\alpha \oplus S(1-\beta\alpha)$.

5 – لأجل كل عنصر $\alpha \in S$ يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $S\alpha \cap S(1-\beta\alpha) = 0$.

مبرهنـــــة 3-5.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

1 – الحلقة S منتظمة.

2 – لأجل كل عنصر $\alpha \in S$، كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M.

3 – لأجل كل عنصر $\alpha \in S$، كل من $Im(\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M.

4 – لأجل كل عنصر $\alpha \in S$، كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M.

البرهـــــــان.

$(1)\Rightarrow(2)$. لنفرض أن الحلقة S منتظمة وليكن $\alpha \in S$، عندئذ $1-\alpha \in S$ وحسب المبرهنة (1-7) كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M.

$(2)\Rightarrow(1)$. ليكن $\alpha \in S$، لما كان $1-\alpha \in S$، عندئذ حسب الفرض كل من:

$$Im(1-(1-\alpha)) = Im(\alpha)\,, \quad Ker(1-(1-\alpha)) = Ker(\alpha)$$

حد مباشر في M، وحسب المبرهنة (1-7) نجد أن الحلقة S منتظمة.

$(1)\Rightarrow(3)$. لنفرض أن الحلقة S منتظمة وليكن $\alpha \in S$، عندئذ حسب المبرهنة (1-7) كل من $Im(\alpha)$ و $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M. فضلاً عن ذلك، لما كان $1-\alpha \in S$، فإنه حسب المبرهنة (1-7) كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M.

$(3)\Rightarrow(1)$. ليكن $\alpha \in S$، لما كان $1-\alpha \in S$، عندئذ حسب الفرض كل من $Im(\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M. ولما كان $1-\alpha \in S$ فإنه حسب الفرض كل من:

$$Im(1-(1-\alpha)) = Im(\alpha)\,, \quad Ker(1-(1-\alpha)) = Ker(\alpha)$$

حد مباشر في M، وحسب المبرهنة (1-7) نجد أن الحلقة S منتظمة.

$(1)\Leftarrow(4)$. لنفرض أن الحلقة S منتظمة وليكن $\alpha\in S$، عندئذ حسب المبرهنة (1-7) كل من $Im(\alpha)$ و $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M. فضلاً عن ذلك، لما كان $1-\alpha\in S$، فإنه حسب المبرهنة (1-7) كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M.

$(4)\Leftarrow(1)$. ليكن $\alpha\in S$، لما كان $1-\alpha\in S$، عندئذ حسب الفرض كل من $Im(1-\alpha)$ و $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M. ولما كان $1-\alpha\in S$ فإنه حسب الفرض كل من $Im(1-(1-\alpha))=Im(\alpha)\,,\quad Ker(1-\alpha)$ حد مباشر في M، وحسب المبرهنة (1-7) نجد أن الحلقة S منتظمة.

المــراجـــع العـــلميـــــة.

[1] – Anderson, F. W and Fuller, K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer (1973).

[2] – Goodearl, K. R., " Von Neumann Regular Rings ", Pitman 1979 .

[3] – Hamza, H., " Regularity and Semi-potency of Hom ", Korean J. Math. **Vol. 22**. No. **1**, (2014), pp. 151 – 167.

[4] – Lam T.Y., " A First Course in Non-commutative Rings ", Springer - Verlag 2001.

[5] – Tuganbaev, A. A., " Semi-regular, Weakly Regular, and π – Regular Rings ", J. Math, Sci. **Vol. 109**, **No. 3**, (2002), pp. 1509 – 1588.

[6] – Von Neumann, J., " On Regular Rings ", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. (1936).

[7] – Ware R., " Endomorphism Rings of Projective Modules ", Trans. Amer. Math. Soc. **Vol. 155**, **No. 1,** (1971), pp. 233 – 256.

[8] – Zhou, Y., " On (Semi) Regularity and The Total of Rings and Modules ". Journal of Algebra, **Vol. 322**, (2009), pp. 562 – 578.