

مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 43 . العدد 11

1443 هـ - 2022 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

أ. د. ناصر سعد الدين	رئيس هيئة التحرير
أ. د. درغام سلوم	رئيس التحرير

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث
بشرى مصطفى

د. محمد هلال	عضو هيئة التحرير
د. فهد شريباتي	عضو هيئة التحرير
د. معن سلامة	عضو هيئة التحرير
د. جمال العلي	عضو هيئة التحرير
د. عباد كاسوحة	عضو هيئة التحرير
د. محمود عامر	عضو هيئة التحرير
د. أحمد الحسن	عضو هيئة التحرير
د. سونيا عطية	عضو هيئة التحرير
د. ريم ديب	عضو هيئة التحرير
د. حسن مشرقي	عضو هيئة التحرير
د. هيثم حسن	عضو هيئة التحرير
د. نزار عبشي	عضو هيئة التحرير

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 963 31 2138071 ++

. موقع الإنترنت : www.albaath-univ.edu.sy

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
 - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
 - اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:
- يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
- اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:
- يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
- اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :
- يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
- اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :
- يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث , وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
 - 2- هدف البحث
 - 3- مواد وطرق البحث
 - 4- النتائج ومناقشتها .
 - 5- الاستنتاجات والتوصيات .

6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.

2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.

3. أهداف البحث و أسئلته.

4. فرضيات البحث و حدوده.

5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.

6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.

7. منهج البحث و إجراءاته.

8. عرض البحث و المناقشة والتحليل

9. نتائج البحث.

10. مقترحات البحث إن وجدت.

11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق B5 25×17.5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54 - أسفل 2.54 - يمين 2.5 - يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

. كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified

Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا

يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي

حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في
المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام
التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع
الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها
معرضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة .
الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة .
وفيما يلي مثال على ذلك:

**-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York,
373p.**

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة, اسم المجلد ويوضع
تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات
الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

**BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News ,
Vol. 4. 20 – 60**

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و
التقيد

بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة البعث:

1. دفع رسم نشر (20000) ل.س عشرون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (50000) ل.س خمسون الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (3000) ل.س ثلاثة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

الصفحة		
30-11	د. حامد عباس لينا حمرة	تقريب الدوال بكثيرات حدود ليجندر المتعامدة متعددة المتحولات
44- 31	محمد العلي	دراسة في المنظومات الهاملتونية و متحولات الطاقة
62-45	أ.د. محمد عامر صنوان طعمة	دور المصفوفات في إيجاد كثيرات حدود ليجنندر بطرائق جبرية خطية
100-63	عبد الناصر ابي زمر أ.د. محمود عامر د. عصام علوان	دراسة مقارنة تآكل سبيكة (نيكل- فوسفور) النانو بلورية وشبه البلورية وغير المتبلورة

120-79	علي ابراهيم د. ندى سلمان د. سامر غدير	الأهمية التطبيقية للرمال الكوارتزية في موقع الدعكانة شمال شرق منطقة القريتين
--------	---	---

تقريب الدوال بكتيرات حدود ليجندر المتعامدة متعددة المتحولات

¹ د. حامد عباس

² لينا حمرة

جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

ملخص البحث

يهتم البحث بدراسة تقريب الدوال متعددة المتغيرات، حيث تم عرض صيغة كثيرة حدود ليجندر بمتحول واحد وبعض خواصه. ثم تم التوصل إلى صيغة كتيرات حدود من نمط ليجندر بمتحولين. وتمت دراسة بعض من خواص كتيرات حدود ليجندر بمتحولين، وتوصلنا إلى علاقة كتيرات حدود ليجندر بثلاثة متحولات بطريقة تدريجية، وأيضاً تم تعميم ذلك بـ n من المتحولات. وفي النهاية تم التوصل إلى حساب علاقة الثوابت (ثوابت كتيرات حدود من نمط- ليجندر بمتحولين) وتعميم علاقة الثوابت بكتيرات حدود من نمط- ليجندر بـ n متحول وذلك في الفضاء R^n .

الكلمات المفتاحية: الدوال المتعامدة، حدوديات ليجندر متعددة المتحولات

تقريب الدوال لكثيرات الحدود المتعامدة

¹ عضو هيئة تدريسية_ جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات.

² طالبة ماجستير_ جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

Approximation function by Legendre polynomial multi variables

¹ Dr. Hamed Abbas

² Lina Hamra

AL Baath university – Faculty Of Science- Department Of Mathematics .

abstract:

This work is concerned with presenting a Legendre polynomial formula with one variable and some of its properties. Then we concluded a Legendre polynomial formula with two variables. Some properties of a Legendre polynomial with two variables were studied. We also found Legendre polynomials with three variables and this was generalized to n variables. Finally, and it resulted in formulating the relationship of the constants (coefficients of Legendre-type polynomials two variables) and generalized this to \mathbf{R}^n space.

key word: Orthogonal function. Legendre polynomials. Approximating functions.

¹ Faculty member_ Al-baath University_ Department Of Mathematics.

² Master Student _ Al-baath University_ Department Of Mathematics.

هدف البحث:

يهدف البحث إلى تقريب الدوال بعدة متحولات بكثيرات حدود ليجندر المتعامدة بـ n متحول. لذلك يجب إيجاد كثيرات حدود ليجندر متعددة المتحولات من درجات مختلفة وفق مبدأ غرام شميت، بعد ذلك سوف نستخدم كثيرات الحدود هذه في تقريب الدوال بعدة متحولات متبعين مبدأ المربعات الصغرى في التقريب لأن كثيرات الحدود المتعامدة الناتجة هي دوال ذات قوى صحيحة ومستمرة على الفضاء R^n .

مقدمة البحث:

نهتم بهذا البحث بتقريب الدوال متعددة المتحولات لكثيرات حدود ليجندر المتعامدة متعددة المتحولات معتمدين بذلك على إيجاد كثيرات الحدود هذه بطريقة غرام شميت حيث إن كثيرات حدود ليجندر بمتحولين تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{nm}(x, y) = \frac{1}{n! \cdot m! \cdot 2^{n+m}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m$$

وأيضاً كثيرات حدود ليجندر بثلاثة متحولات تعطى بالشكل:

$$F_{nmk}(x, y, z) = \frac{1}{n! \cdot m! \cdot k! \cdot 2^{n+m+k}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m \cdot \frac{\partial^k}{\partial z^k} (z^2 - 1)^k$$

وهكذا فإن كثيرات حدود ليجندر بـ n من المتحولات تعطى بالصيغة العامة الآتية:

$$F_{n_1, n_2, \dots, n_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\mu \cdot 2^\lambda} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\partial^{n_i}}{\partial x_i^{n_i}} (x_i^2 - 1)^{n_i}$$

حيث إن:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n n_i \quad , \quad \mu = \prod_{i=1}^n n_i !$$

نطبق مبدأ المربعات الصغرى لتقريب الدوال. فنحصل على الثوابت الموافقة، حيث إن:

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} a_{ij} \cdot L_{ij}(x, y)$$

و $L_{ij}(x, y)$ هي كثيرات حدود ليجندر بمتحولين.

ثم تم إيجاد الوسطاء a_{nm} بمتحولين بالشكل الآتي:

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(2m+1)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot p_{nm}(x, y) dx dy$$

ثم بثلاثة متحولات ، وتمكننا من إيجاد الوسطاء a_{nmk} بالشكل التالي:

$$a_{nmk} = \frac{(2n+1)(2m+1)(2k+1)}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) \cdot p_{nmk}(x, y, z) dx dy dz$$

تمكننا من كتابة تلك الوسطاء بصورة عامة، عندما تكون كثيرة الحدود تابعة ل n من المتحولات. ثم تم تقريب الدوال بكثيرات الحدود المتعامدة من نمط ليجندر بمتحولين وذلك باستخدام المربعات الصغرى في حالة الدوال المستمرة، واستنتجنا الثوابت الموافقة في حالة المتحولين، ثم ثلاث متحولات ثم اخذنا الثوابت في الفضاء R^n ، وتم تطبيق هذا المبدأ لحل بعض الأمثلة، وتم رفعها بجداول وتم تزويدها برسوم توضح ذلك.

طريقة ومراحل البحث:

1- اعتماد طريقة غرام شميدث للتعامد والنظيم لإيجاد دوال من نمط ليجندر بمتحولين بالشكل:

$$F_{nm}(x, y) = \frac{1}{2^{n+m} \cdot n! \cdot m!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m$$

2- استخدام طريقة المربعات الصغرى في التقريب من أجل الدوال المستمرة على اعتبار أن دوال ليجندر هي دوال مستمرة على المنطقة $[-1, 1]^2$.

3- استنتاج ثوابت التقريب وتعميمها في الفضاء R^n .

4- تطبيقات بسيطة حول ذلك.

5- ايضاحات باستخدام بعض الرسوم البيانية.

طريقة البحث:

نعرض كثيرات حدود ليجندر بمتحول واحد وبعض خصائصها للاستفادة منها في دراسة كثيرات حدود ليجندر بمتحولين وبعده متحولات ودراسة خصائصها.

من المعلوم أن كثيرة حدود ليجندر بمتحول واحد تكتب وفق صيغة رودريغ بالشكل الآتي [4]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (1)$$

بفرض أن الدالة $y = f(x)$ قابلة للمكاملة على المجال $[-1, 1]$ عندئذ:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 f(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx$$

نجري عملية التكامل بالتجزئة، لذلك نفرض أن :

$$u = f(x) \Rightarrow du = df(x)$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \Rightarrow v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx$$

بالتبديل في القانون:

$$\int_{-1}^1 u dv = [uv]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 v du$$

نجد إن:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx &= \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx \end{aligned}$$

بالتبديل في حدود التكامل نجد أن الحد الأول يساوي الصفر، وبالتالي:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx = \frac{-1}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 f'(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx$$

نجري عملية التكامل مرة أخرى بطريقة التجزئة:

من أجل ذلك نفرض أن:

$$u = f'(x) \Rightarrow du = f''(x) dx$$

$$dv = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx \Rightarrow v = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n$$

بالتبديل في دستور التكامل بالتجزئة يكون:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx = \frac{-1}{2^n \cdot n!} \left[f'(x) \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f''(x) \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n dx$$

الحد الأول يساوي الصفر، وأثناء التبديل بحدود التكامل يكون:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx = \frac{(-1)^2}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 f''(x) \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n dx$$

وهكذا بإجراء المكاملة n مرة متتالية بطريقة التجزئة، نجد إن:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot f^{(n)}(x) dx \quad (2)$$

وهي الخاصة الأولى

دراسة الخاصة الثانية:

$$\int_{-1}^1 x^n \cdot p_n(x) dx = \frac{2^{n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

الإثبات:

إذا كان $f(x) = x^n$ نجد إن:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} x^n dx$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^n) \cdot dx = n! \quad \text{ولكن:}$$

بالتبديل في العلاقة السابقة يكون:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot p_n(x) dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^{2n}}{2^n} \cdot \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$$

حيث إن: $(-1)^n = 1$ وذلك مهما تكن زوجية أو فردية.

لحساب هذا التكامل نفرض أن:

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t \cdot dt$$

وعند

ما:

$$x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \quad \& \quad x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

عند:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^n \cdot p_n(x) dx &= \frac{1}{2^n} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t^{2n+1} dt = \frac{2}{2^n} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t^{2n+1} dt \\ &= \frac{2}{2^n} \left[\frac{(2^n)^2 \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \right] = \frac{2^{n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^1 x^n \cdot p_n(x) dx = \frac{2^{n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \quad (3)$$

الخاصة الثالثة:

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx = \frac{2}{2n-1}$$

الإثبات:

نبدل في (2) كل $f(x) = p_n(x)$ ، نجد إن:

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^n p_n(x)}{dx^n} dx \quad (4)$$

$$\frac{d^n p_n(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right] \quad \text{ولكن}$$

وبملاحظة أن:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n = (2n)!$$

يكون:

$$\frac{d^n p_n(x)}{dx^n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

بالتبديل عن هذه القيمة في (4) نجد إن:

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$$

ولكن:

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{2 \cdot (2^n)^2 \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

يكون بالاختصار:

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) = \frac{2}{2n+1} \quad (5)$$

وهذه الخاصة موجودة في كتاب التحليل عددي (2) 2018

ننتقل الآن لدراسة خواص كثيرات حدود ليجندر بمتحولين:

من المعلوم أن كثيرات حدود ليجندر بمتحولين تعطى وفق العلاقة التالية:

$$P_{nm}(x, y) = \frac{1}{2^{n+m} \cdot n! \cdot m!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m \quad (6)$$

الخاصة الأولى:

نحسب التكامل التالي:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot p_{nm}(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{2^{n+m} \cdot n! \cdot m!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m dx dy = \\ &= \frac{1}{2^{n+m} \cdot n! \cdot m!} \cdot \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n dx \right] \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m dy \end{aligned}$$

نحسب التكامل ما بين القوسين المتوسطين. والذي نرمز له بالرمز I فيكون حسب الخاصة (2) أن:

$$I = \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y) dx$$

وبالتالي نجد إن:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot p_{nm}(x, y) dx dy = \frac{1}{2^{n+m} \cdot n! \cdot m!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \\ &\cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m dx dy \\ &= \frac{1}{2^{n+m} \cdot n! \cdot m!} \cdot \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n dx \right] \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m dy \end{aligned}$$

نحسب التكامل بين القوسين المتوسطين والذي نرمز له بـ Ω :

$$\Omega = \int_{-1}^1 f(x, y) \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y) dx$$

وحسب العلاقة (2) يكون:

$$\Omega = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} (-1)^n \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y) \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m dx dy$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot p_{nm}(x, y) = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n (y^2 - 1)^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x, y) \right) dx dy \quad (7)$$

نبدل الآن $f(x, y)$ بـ $p_{nm}(x, y)$ نجد إن:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{nm}^2(x, y) dx dy = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n (y^2 - 1)^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial^m}{\partial y^m} p_{nm}(x, y) \right) dx dy$$

باشتقاق $p_{nm}(x, y)$ ، n مرة بالنسبة لـ x ، و m مرة بالنسبة لـ y نجد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial y^m} p_{nm}(x, y) &= \\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} (y^2 - 1)^m \end{aligned}$$

باعتبار أن $\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}(y^2 - 1)^m = (2m)!$ نجد إن :

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_{nm}(x, y) = \frac{(2m)!}{2^{n+m} \cdot n! \cdot m!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n$$

باشتقاق هذا المقدار n مرة بالنسبة ل x نجد :

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left[\frac{\partial^m}{\partial y^m} P_{nm}(x, y) \right] = (2n)! \cdot (2m)!$$

بالتبديل يكون :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{nm}^2(x, y) dx dy &= \\ &= \frac{(-1)^{n+m} \cdot (2n)! \cdot (2m)!}{2^{2n+2m} \cdot (n!)^2 \cdot (m!)^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot (y^2 - 1)^m dx dy \end{aligned}$$

بالاعتماد على التكامل التالي :

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$$

وبفرض أن :

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

نجد بعد تبديل حدود التكامل إن :

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = (-1)^n \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt$$

$$= \frac{2 \cdot (2^n)^2 (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

وكذلك الأمر بالنسبة للتكامل $\int_{-1}^1 (y^2 - 1)^m dy$, بالتبديل يكون:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{nm}^2(x, y) dx dy =$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2m} \cdot (2n)! \cdot (2m)!}{2^{2n+2m} \cdot (n!)^2 \cdot (m!)^2} \cdot 2^{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{2^{2m+1} \cdot (m!)^2}{(2m+1)!}$$

بالاختصار يكون بعد ملاحظة أن:

$$(-1)^{2n+2m} = 1$$

نجد إن:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{nm}^2(x, y) dx dy = \frac{4}{(2n+1)(2m+1)} \quad (8)$$

بمقارنة (1) مع (6) يمكن كتابة كثيرات الحدود من نوع ليجندر بثلاث متحولات:

$$p_{nml}(x, y, z) = \frac{1}{2^{n+m+l} \cdot n! \cdot m! \cdot l!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^2 - 1)^m \cdot \frac{\partial^l}{\partial z^l} (z^2 - 1)^l$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{nm}^2(x, y, z) dx dy dz = \frac{8}{(2n+1)(2m+1)(2l+1)} \quad (9)$$

بمقارنة العلاقات (5) و(8) مع (9) يمكننا كتابة ما يلي:

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 p_{n_1, n_2, \dots, n_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k = \frac{2^k}{(2n_1+1)(2n_2+1)\dots(2n_k+1)} = \frac{2^k}{\prod_{i=1}^k (2n_i+1)}$$

الآن بتبديل (9) في العلاقة التالية:

$$a_{nm} = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot p_{nm}(x, y) dx dy}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{nm}^2(x, y) dx dy}$$

نجد إن:

$$a_{nm} = c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot p_{nm}(x, y) dx dy$$

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(2m+1)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot p_{nm}(x, y) dx dy \quad (10)$$

الخطأ المرتكب أثناء تقريب الدوال بكثيرات الحدود المتعامدة:

إن الخطأ المرتكب عند تقريب الدوال بكثيرات الحدود المتعامدة هو الخطأ المرتكب عند تقريب المربعات الصغرى في الحلة المستمرة ويساوي الفرق ما بين الدالة وكثيرة حدود التقريب بالقيمة المطلقة، أي أن:

$$R = \|f(x_1, \dots, x_n) - P_m(x_1, \dots, x_n)\|$$

ولهذا الخطأ المرتكب صيغ متعددة، وباعتبار التقريب للدوال المستمرة وكثيرات حدود ليجندر هي دوال مستمرة فإن الخطأ المرتكب يعطى بالعلاقة التالية:

$$R = \sqrt{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 [f(x_1, \dots, x_n) - P_m(x_1, \dots, x_n)]^2 dx_1 \dots dx_n} \quad (11)$$

حيث إن الدالة المراد تقريبها ، و $P_m(x_1, \dots, x_n)$ كثيرة حدود التقريب الناتج عن كثيرات الحدود المتعامدة على المجال $[-1, 1]^n$.

كحالة خاصة عندما يكون التقريب لدالة بمتحولين تصبح العلاقة (10) بالشكل:

$$R = \sqrt{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f(x, y) - P_m(x, y)]^2 dx dy}$$

تطبيق:

استخدم كثيرات حدود ليجندر بمتحولين، ضمن المربع $[-1, +1]^2$ من أجل تقريب الدالة

$$f(x) = e^{x+y}$$

بكثيرة حدود من الدرجة الأولى.

الحل:

بما أن كثيرة حدود التقريب من الدرجة الأولى، فإن كثيرات حدود ليجندر المطلوبة:

$$p_{00}(x,y) = 1, \quad p_{10}(x,y) = x, \quad p_{01}(x,y) = y$$

كثيرة حدود التقريب المطلوبة من الشكل:

$$P_1(x,y) = a_{00}p_0(x,y) + a_{10}p_1(x,y) + a_{01}p_1(x,y)$$

من العلاقة (10) نحسب كلاً من الثوابت: $a_{10} \cdot a_{01}$, a_{00} نجد:

$$a_{00} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{x+y} dx dy = \frac{1}{4} (e - \frac{1}{e})^2 = 1.381097846$$

$$a_{10} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{x+y} x dx dy = 1.296997075$$

$$a_{01} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{x+y} y dx dy = 1.296997075$$

أي أن كثيرة حدود التقريب هي:

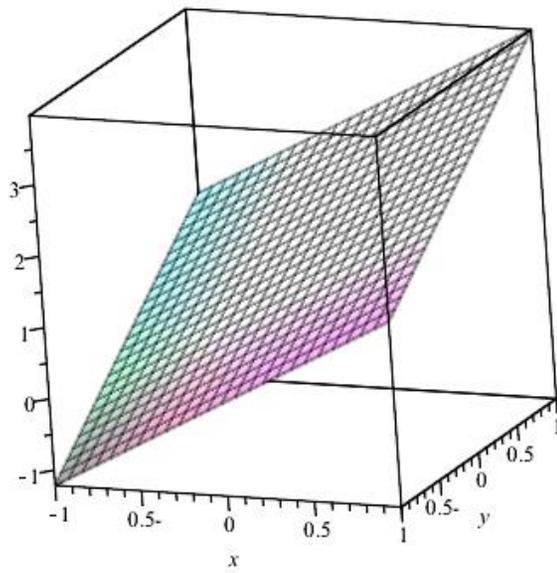
$$P_1(x,y) = 1.381097846 + 1.296997075 (x + y)$$

لحساب الخطأ المرتكب :

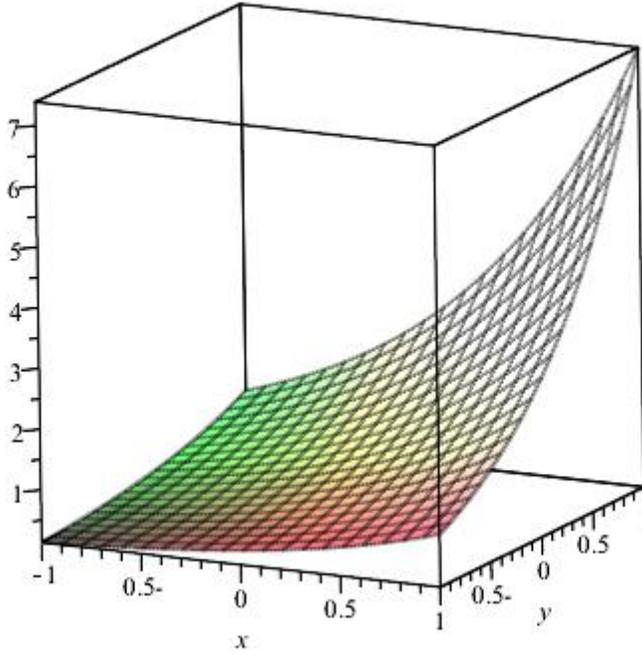
$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f(x,y) - p_m(x,y)]^2 dx dy} = \\ &= \sqrt{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[e^{x+y} - (1.381097846 + 1.296997075(x+y)) \right]^2 dx dy} \\ &= \sqrt{1.03852095} = 1.019078481 \end{aligned}$$

لنوضح هذا التقريب بشكلين ، الشكل الأول معادلة المستوي $P_1(x,y)$ والشكل

الثاني الرسم البياني للدالة $z = e^{x+y}$



شكل مستوي التقريب



$$z = e^{x+y} \text{ الدالة المقربة}$$

الاقتراحات والتوصيات:

1-تقريب كثيرات الحدود المتعامدة من نوع آخر مثل هيرميت وتشيبشيف متعددة المتحولات.

2-حساب الثوابت الموافقة أو المعاملات وتعميم ذلك.

3-حساب الأخطاء المرتكبة.

المراجع العلمية:

[1]-د. حامد عباس كتاب التحليل العددي (2) جامعة البعث 2018

[2]-د. ابراهيم ابراهيم كتاب الدوال الخاصة جامعة البعث 2004-2005

[3]- د. هاشم عبد المي كتاب تحليل عددي (2) جامعة حلب 1991-1992

المراجع المستخدمة:

[4]. M ysovskikh.I.P.2018 Interpolation cubature formulas

Nowak . Mowscou.336.p

[5].cege.g.1975 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Mysovskih.I.p.Abbas.H.A.1991 about. method reproducing Kernel cubature Formulas .vestnig Leningrad univer _N7 P 3-11

[7].Kryov .1967 approximation Numerical for lintegration.Hawka.Mowscou.500.

[8] Richard L . Burden , J. Douglas Faires. Numerical analyses 9 ed 2005.

[9] Kolmagorof .A.N , Fomin.C.V ,Elements of the theory functions and functional analysis- Moscow .1989 .623 p

دراسة في المنظومات الهاملتونية

و متحولات الطاقة

اسم الباحث: محمد العلي

عنوان الباحث: قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة البعث

البريد الالكتروني: mali@albaath-univ.edu.sy

الملخص

قدمنا في هذا البحث بعض المفاهيم التي تساعد على فهم السلوك الفوضوي للمنظومات الهاملتونية بعد إدخال اضطرابات صغيرة عليها. بعد تعريف متحول الطاقة للمنظومة الهاملتونية، قمنا بإيجاد علاقة رياضية تربط بين متحول الطاقة و تابع ميلنيكوف لهذه المنظومة. كما قمنا بتعريف تابع الإزاحة الزمنية من خلال تأخير زمني يتوافق مع الاضطراب في الشروط الابتدائية للمنظومة. قمنا أيضاً بتعريف تصوير جديد للمعاودة بالاعتماد على متحول الطاقة، حيث اعتبرنا في هذا التصوير نقاط فضاء الموضوع التي تمثل النهايات المحلية لتابع الطاقة. لقد قدمنا في نهاية البحث نتائج تطبيق هذه الطريقة على منظومة دفينغ فاندر بول الشهيرة.

الكلمات المفتاحية:

المنظومة الهاملتونية، المدار الهوموكليني، منحنى الفصل، المتنوعة المستقرة، المتنوعة غير المستقرة، تابع ميلنيكوف، تصوير المعاودة، الاضطراب.

A study in Hamiltonian Systems and Energy Variables

Researcher's Name: Dr. Mohamad Alali

Address: Mathematics Dept. / Science Fac. / Albaath Univ.

Email Address: mali@albaath-univ.edu.sy

Abstract

This work is an attempt to understand the chaotic behavior arising in a perturbed Hamiltonian system. After introducing the energy variable of such system, we established a relation between this variable and the well-known Melnikov Function of this system. Accordingly, we introduced the time-shift function which is a time delay corresponding to a given perturbation in initial conditions. Also, we defined a new return map related to the energy variable in which we consider the points of peak energy in the phase space of such system. Application of this method to the well-known *Duffing van der Poll* system and results are included at the end of this paper.

Keywords: Hamiltonian System, Homoclinic Orbit, Separatrix, Stable Manifold, Unstable Manifold, Melnikov Function,

Return Map, Perturbation.

1. مقدمة:

تعتبر الفوضى بالمفهوم الأدبي واللغوي مفهوماً قديماً، حيث تظهر كمفردة لغوية وكمفهوم أدبي في روايات وقصص الآلهة عند الرومان القدماء و الإغريق. أما في المفهوم الرياضي الحديث، فالفوضى هي مفهومٌ جديدٌ، إلى حدٍ ما، تم اكتشافه من قبل لورانز [1] في الجاذب الديناميكي لنموذج رياضي يمثل منظومة الطقس التي كان يعمل عليها هذا الباحث.

لا يزال مفهوم الفوضى يجذب العديد من الباحثين في جميع مجالات العلوم بشكلٍ عام والرياضيات بشكلٍ خاص لدراسته و كتابة الأبحاث الجديدة حوله، حيث يمكن تصنيف هذه الدراسات و الأبحاث ضمن صنفين أساسيين

- (a) دراسات و أبحاث تهتم بإيجاد قوانين و معايير محددة تؤكد وجود أو عدم وجود السلوكية الفوضوية في المنظومة الديناميكية، أي مسألة التنبؤ بالفوضى.
- (b) دراسات و أبحاث تهتم بالسيطرة و التحكم بالسلوك الفوضوي للمنظومة الديناميكية في حال وجوده و تحديد الأساليب و الطرائق المختلفة لذلك، أي مسألة التحكم بالفوضى. وقد ظهرت في العقود الخمسة الأخيرة نتائج هامة و متميزة تتعلق بمسألة التنبؤ و وُضعت العديد من المعايير للتنبؤ بالسلوكية الفوضوية للمنظومة الديناميكية، كتاب ميلنيكوف و معاملات ليابونوف الأسية و بُعد الجاذب الديناميكي للمنظومة. وقد ظهرت أيضاً العديد من الأبحاث الأخرى المتعلقة بمسألة التحكم [2-11]، و لا يزال البحث جارياً عن طرائق و معايير جديدة.

2. طرائق ونتائج البحث:

سنعتمد خلال هذا البحث على الدراسة النظرية البحتة لموضوع البحث والإثباتات اللازمة لنتائج البحث. كما سنقوم بتدعيم هذه النتائج بتطبيق عملي يدعم ما سنحصل عليه من نتائج.

3. الدراسة النظرية و المناقشة:

من أجل أي تابع

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto H(x_1, x_2)$$

نعرف التابع $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ بالشكل

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$$

بحيث أن

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{cases} ; \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

و بالتالي يمكن أن نعرف المنظومة الديناميكية التالية

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل المصفوفي التالي

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (1)$$

حيث أن x هي مصفوفة العمود $(x_1 \ x_2)^T$.

تسمى المنظومة (1) منظومة ديناميكية هاملتونية، كما يسمى التابع H تابع هاملتون لهذه المنظومة. و تتميز هذه المنظومة بأنها تملك تكاملاً أولاً من الشكل

$$H(x_1, x_2) = C \quad (2)$$

حيث أن C هو ثابت اختياري، يسمى ثابت الطاقة للمنظومة الديناميكية (1) و الذي يحدد سوية الطاقة للنقطة المتحركة على المسارات المختلفة لهذه المنظومة في مستوي الطور $X_1 O X_2$.

سنفرض، وبدون المساس بعمومية المسألة، أن هذه المنظومة تملك نقطة سرجية (Saddle Point) وحيدة في مبدأ الإحداثيات تنطبق من أجلها المنطويتين المستقرة و غير المستقرة لتشكلان معاً منحنى الفصل (Separatrix) و الذي يدعى في هذه الحالة دورة هوموكليينية (Homoclinic Orbit) للمنظومة، كما هو موضح في الشكل (1).

3.1. متحول الطاقة و تابع ميلنيكوف:

يادخال اضطراب دوري صغير من الشكل $f(x, t)$ على الطرف الأيمن من المنظومة (1)، من أجل أي تابع $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ يحقق أن

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0$$

حيث أن $\tau \in \mathbb{R}^+$ هو دور التابع، سنحصل على منظومة مضطربة موافقة من الشكل

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \varepsilon f(x, t) \quad (3)$$

باعتبار أن $0 < \varepsilon \ll 1$ ، فإننا نتوقع انزياح النقطة السرجية للمنظومة عن مبدأ

الشكل (2): انكسار الاتصال الهوموكليني في المنظومة المضطربة.

لاحظ أيضاً امتلاك المنظومة (1) لنقطتين ثابتتين O_1 و O_2 على المحور OX_1 هما مركزين مستقرين للمنظومة. كما أنه يمكن دائماً اختيار تابع هاملتون للمنظومة بحيث توافق القيمة $C = 0$ منحنى الفصل و بحيث يمكن تصنيف مسارات المنظومة بالشكل

1. المسار γ_0 الذي يوافق قيمة ثابت الطاقة $C = 0$, أي أن $\gamma_0 \equiv \gamma (C = 0)$.

2. المسارات γ_- التي توافق قيم ثابت الطاقة $C < 0$, أي أن $\gamma_- \equiv \gamma (C < 0)$.

3. المسارات γ_+ التي توافق قيم ثابت الطاقة $C > 0$, أي أن $\gamma_+ \equiv \gamma (C > 0)$.

كما نتوقع أن تصف المعادلة (2) مسارات المنظومة المضطربة (3), بحيث يصبح ثابت الطاقة C متحولاً ندعوه متحول الطاقة في المنظومة المضطربة, أي أن $C = C(x, t)$. و بالتالي, باشتقاق طرفي العلاقة (2) بالنسبة للزمن, نجد أن

$$\frac{dC}{dt}(x, t) = \frac{d}{dt} H(x) = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

و بما أن

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -F_2(x) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = F_1(x)$$

و باستخدام المنظومة (3), نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt}(x,t) &= -F_2(x) \{F_1(x) + \varepsilon f_1(x,t)\} \\ &\quad + F_1(x) \{F_2(x) + \varepsilon f_2(x,t)\} \\ &\Rightarrow \\ \frac{dC}{dt}(x,t) &= \varepsilon [F_1(x) f_2(x,t) - F_2(x) f_1(x,t)] \end{aligned}$$

و بتعريف الجداء الخارجي للتابعين F و f بالشكل

$$F \wedge f = F_1 f_2 - F_2 f_1$$

تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل

$$\frac{dC}{dt}(x,t) = \varepsilon \{F(x) \wedge f(x,t)\} \quad (4)$$

العلاقة الأخيرة تبين أن النقطة المتحركة في مستوي الحالة للمنظومة المضطربة (3) سوف تنتقل بين سويات الطاقة المختلفة للمنظومة غير المضطربة (1) بحيث تبقى تغيرات الطاقة صغيرة و متناسبة مع الاضطراب الذي تم إدخاله على المنظومة الأساسية.

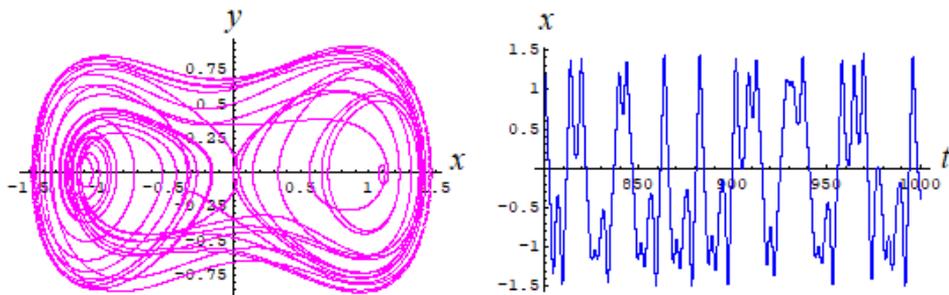
تحدد طريقة ميلنيكوف [2] الوضع النسبي بين المتنوعتين المستقرة $L_s(\varepsilon)$ و غير المستقرة $L_u(\varepsilon)$ للنقطة السرجية $O(\varepsilon)$, حيث يحدد تابع ميلنيكوف $M(t_0)$ البعد بين هاتين المتنوعتين في لحظة زمنية t_0 و الذي يعطى بالتكامل التالي

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0), t)\} dt$$

حيث تمثل $q_0(t-t_0)$ المعادلات الوسيطة لمنحني الفصل في المنظومة غير المضطربة. و بتعويض العلاقة (4) في عبارة تابع ميلنيكوف السابقة, يصبح تابع

ميلنيكوف بالشكل

$$M(t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dC}{dt} (q_0(t-t_0), t) dt \quad (5)$$



الشكل (3): مسار المنظومة المضطربة (3) في حال وجدت لحظة زمنية t_0 يكون من أجلها

$$.M(t_0) = 0$$

تبين العلاقة الأخيرة المعنى الفيزيائي لتابع ميلنيكوف، حيث تبين هذه العلاقة أن تابع ميلنيكوف يمثل التغير الكلي لمتحول الطاقة على كامل المدار الهوموكليني للمنظومة (منحني الفصل). فإذا وجدت لحظة زمنية معينة t_0 يكون من أجلها $M(t_0) = 0$ ، أي وجود تقاطع بين المتنوعتين المستقرة و غير المستقرة، فإننا نتوقع من مسار المنظومة المضطربة أن يتأرجح على جانبي منحني الفصل بحيث ينتقل بين المسارات γ_+ و γ_- للمنظومة غير المضطربة ليشكل مساراً قريباً كالمسار المبين في الشكل (3).

3.2. تابع الإزاحة الزمنية:

لنعتبر مساراً $x(t)$ للمنظومة المضطربة (3) يحقق الشرط الابتدائي $x(t_0) = x^0$ ، و لنعتبر مساراً مجاوراً $x_\delta(t)$ لهذا المسار يحقق الشرط الابتدائي $x_\delta(t_0) = x^0 + \delta e$ ، حيث أن $0 < \delta \ll 1$ و $e = (e_1 \ e_2)^T$ هو متجه واحدة في مستوى الحالة للمنظومة، أي أن

$$\begin{cases} e_1 = \cos(\theta) \\ e_2 = \sin(\theta) \end{cases} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

و نعتبر الحالة التي يمر فيها المسار $x(t)$ من نقطة x^1 في مستوي الحالة في

لحظة زمنية ما t_1 يكون فيها $\frac{dC}{dt}(x^1, t_1) = 0$. سنهتم في هذه الفقرة بحساب

الفارق الزمني δ_t اللازم للمسار $x_\delta(t)$ لكي يمر بنقطة $x_\delta^1 = x_\delta(t_1 + \delta_t)$

$$\frac{dC}{dt}(x_\delta^1, t_1 + \delta_t) = 0$$

لسهولة المسألة, سوف نعتبر أن $t_1 = t_0$, أي أن

$$\frac{dC}{dt}(x^0, t_0) = 0, \quad \frac{dC}{dt}(x_\delta^0, t_0 + \delta_t) = 0 ; \quad x_\delta^0 = x_\delta(t_0 + \delta_t)$$

بفرض أن δ صغير بقدر كافٍ, و باستخدام منشور تايلور و باستخدام الحدود من الدرجة الأولى فقط, سنجد أن

$$x_\delta^0 = x^{(0)} + \delta e + \delta_t \{F + \varepsilon f\}(x^{(0)}, t_0)$$

و باستخدام الشرط

$$\frac{dC}{dt}(x_\delta(t_0 + \delta_t), t_0 + \delta_t) = 0$$

سيكون

$$\delta_t = \delta K_\theta(x, t)$$

حيث أن

$$K_\theta(x, t) = -\varepsilon \{(\mathfrak{I}e) \wedge f + F \wedge (\mathfrak{I}_1 e)\} / \frac{d^2C}{dt^2} \quad (6)$$

و ذلك بشرط أن يكون $\frac{d^2C}{dt^2} \neq 0$, حيث أن $\mathfrak{S} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$ و $\mathfrak{S}_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ هي المصفوفات اليعقوبية للتابعين F و f على الترتيب. كما سندعو التابع $K_\theta(x,t)$ تابع الإزاحة الزمنية.

تبين العلاقة (6) أهمية كون المشتق الثاني $\frac{d^2C}{dt^2}$ لمتحول الطاقة غير معدوم. ففي

النقاط x التي يكون فيها $\frac{d^2C}{dt^2}(x,t) = 0$ في لحظة زمنية ما t , فإن تابع

الإزاحة الزمنية يكون غير معرف و بالتالي غير موجود. أي أنه سيكون للمسارين المتجاورين ديناميكيتان مختلفتان, و بالتالي ستتباعدان بشكل سريع (أسي) عن بعضهما مما سيؤدي لظهور الديناميكية الفوضوية في سلوك المنظومة. و بالتالي فإنه و مهما كان المساران قريبان من بعضهما فلا بد أن يتفرقا و يبتعدا عن بعضهما.

لذلك سندعو الحالة (x,t) التي يكون عندها $\frac{dC}{dt} = 0$ و $\frac{d^2C}{dt^2}(x,t) = 0$

نقطة حرجة للطاقة.

4. تطبيق:

لنعتبر المنظومة الديناميكية (1) الموافقة للتابعين

$$\begin{cases} F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x - x^3 \end{bmatrix} \\ f \begin{bmatrix} 0 \\ p(x^2 - 1)y + q \cos(\omega t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

حيث أن p, q, ω هي وسطاء للمنظومة ذات قيم موجبة.

تدعى هذ المنظومة منظومة هزاز دفينغ - فاندربول [10], و قد قمنا بدراسة هذه

المنظومة و استنتاج تابع ميلنيكوف لها و هو

$$M(t_0) = \pm Aq \text{ Sin}(\omega t) - D$$

حيث أن

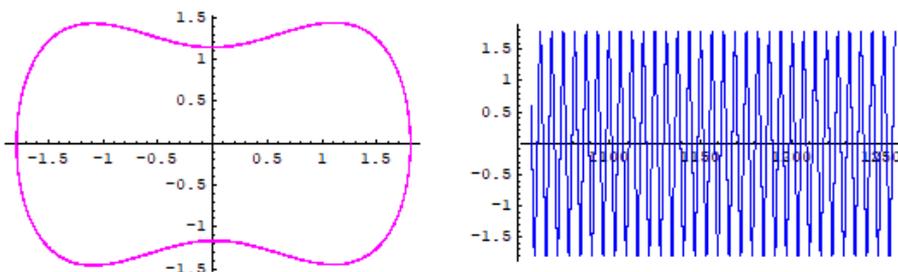
$$A = \sqrt{2} \pi \omega \text{ Sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right)$$

$$D = \frac{4}{15} p$$

و باستخدام العلاقة (4), وجدنا أن

$$\frac{dC}{dt} = \varepsilon y \left[p(x^2 - 1)y + q \text{ Cos}(\omega t) \right]$$

يبين الشكل (1) فضاء الحالة للمنظومة غير المضطربة. و باستخدام قيم الوسطاء $q = 3$ و $\omega = 3$ و وضع $\varepsilon = 0.1$, قمنا برسم مسارات المنظومة التي بينت وجود السلوكية الفوضوية في المنظومة من أجل $p = 0.07$ الموضحة في الشكل (3). كما بينا وجود سلوكية غير الفوضوية من أجل $p = 0.08$ الموضحة في الشكل (4).



الشكل (4): مسار المنظومة المضطربة (3) في حال عدم وجود لحظة زمنية t_0 يكون من أجلها

$$M(t_0) = 0$$

5. النتائج والمقترحات:

لقد بينت نتائج هذا البحث أهمية نظرية ميلنيكوف في دراسة المنظومات الديناميكية الهاملتونية، حيث توفر هذه النظرية آلية حسابية للتنبؤ بوجود السلوكية الفوضوية في هذه المنظومات. كما يمكن استنتاج الأهمية الكبيرة لنظرية ميلنيكوف في دراسة المنظومات الديناميكية، لكون أي منظومة ديناميكية يمكن إرجاعها إلى شكل مضطرب لمنظومة هاملتونية.

و قد بينت الدراسة النظرية المقدمة خلال هذا البحث الارتباط الوثيق من خلال العلاقة (6) التي قمنا باستنتاجها بين تابع ميلنيكوف و متحول الطاقة الذي قمنا بتعريفه في هذا البحث، حيث قدمت هذه العلاقة تفسيراً جديداً للسلوكية الفوضوية الموجودة في المنظومات الهاملتونية.

يجب أن تولى الأهمية لدراسة منحنيات و سطوح سوية الطاقة في المنظومة الهاملتونية و التوسع في دراسة تابع الإزاحة الزمنية للمنظومة المعطى بالعلاقة (6) لما نتوقعه من انعكاس النتائج التي يمكن الحصول عليها على مسألة التنبؤ و التحكم بالفوضى في المنظومات الديناميكية، و هذا ما سنقوم بالتركيز عليه في الأبحاث المستقبلية.

المراجع:

- [1] E.N. Lorenz, 1963. J. Atmos. Sci. 20, p. 130.
- [2] P. G. Drazin, 1992. "Nonlinear systems", Cambridge Univ. Press, pp. 251–260.
- [3] Abid, pp. 140–143; H. van Beijeren, J. R. Dorfman, E. G. D. Cohen, H. A. Posch and Ch. Dellago, 1996. Phy. Rev. Lett. 77, p. 1974.

- [4] J. D. Farmer, E. Ott and J. A. Yorke, 1983. *Physica* 7D, pp. 153–180.
- [5] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, 1990. *Phy. Rev. Lett.* 64, p. 1196.
- [6] R. Lima and M. Pettini, 1990. *Phy. Rev. A* 41, p. 726; F. Cuadros and R. Chacon, 1993. *Phy. Rev. E* 47, p. 4628; R. Lima and M. Pettini, 1993. *Phy. Rev. E* 47, p. 4630.
- [7] T. Kapitaniak, 1991. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 1, pp. 357–362.
- [8] S. Rajasekar and M. Lakshmanan, 1993. *Physica D* 67, pp. 282–300.
- [9] Recardo Chacon, 1996. *Phy.Rev.Lett.* 77, p. 482.
- [10] S Rajasekar, 1993. *Pramana J. Phys* 41, p. 295.
- [11] G. Cicogna and M. Santoprete, 2000. *J. Math. Phys.* 41, p. 805.

دور المصفوفات في إيجاد كثيرات حدود ليجندر بطرائق جبرية خطية

طالبة الدراسات العليا: صنوان طعمة

كلية العلوم - جامعة البعث

الدكتور المشرف: أ.د. محمد عامر

الملخص :

يهدف البحث إلى إيجاد كثيرات حدود ليجندر بطرائق جبرية خطية تعتمد على مبرهنة ليوفيل -شتورم سوف نحاول إيجاد مصفوفة المؤثر التفاضلي لهذه الكثيرات والقيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها .

الكلمات المفتاحية : المصفوفات والعمليات عليها- كثيرات حدود ليجندر - القيم والمتجهات الذاتية - المعادلة فوق الهندسية .

The Role of matrices in finding Legendre polynomials by linear algebraic methods

Abstract:

This research aims to find Legendre polynomials by linear algebraic methods based on the Liouville-Sturm theorem by finding the differential operator matrix for these polynomials, their eigenvalues and their corresponding eigenvectors.

Keywords:

Matrixs and their operations – Legendre polynomials – eigenvalues and eigenvectors – a hypergeometric equation

مقدمة :

كما نعلم إن كثيرة حدود ليجندر معروفة لكثير من الذين يعملون في حقل الرياضيات نظراً لاستخداماتها المتعددة، ويمكن العثور عليها بطرائق جبرية خطية معروفة تستند على مبرهنة ليوفيل – شتورم [7,8]، وسوف نحاول إيجاد مصفوفة المؤثر التفاضلي لهذه الكثيرات والقيم الذاتية المقابلة لها، وهذه الطريقة تختلف عن الطرائق القياسية الأخرى التي تعتمد على حل معادلة ليجندر التفاضلية باستخدام متسلسلات القوى والدالة المولدة وصيغة رودريج.

كما إن كثيرة حدود ليجندر هي حلول لمعادلة تفاضلية عادية مثل المعادلة فوق الهندسية التي تظهر عند حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية وحل معادلة شرودينجر بثلاث أبعاد [1].

يمكن كتابة المعادلة فوق الهندسية بالشكل :

$$s(x)\dot{F}(x) + t(x)\dot{F}(x) + \lambda F(x) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

حيث F دالة حقيقية معرفة بالصورة : $F: U \rightarrow \mathcal{R}$ حيث $U \subset \mathcal{R}$

و $\mathcal{R} \in \lambda$ كقيمة ذاتية لها .

إن $s(x)$ و $t(x)$ كثيرات حدود حقيقية من الدرجة الثانية والأولى على الأكثر.

وتوجد حالات مختلفة تعتمد على نوع الدالة $s(x)$:

الحالة الأولى :

عندما تكون $s(x)$ ثابتة تصبح المعادلة (1) بالشكل :

$$\hat{F}(x) - 2\alpha x \hat{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

حيث إن $s(x) = const$ وإذا كانت $\alpha = 1$ نحصل على كثيرة حدود هرميت .

الحالة الثانية :

عندما $s(x)$ تكون كثيرة حدود من الدرجة الأولى تصبح المعادلة (1) بالشكل :

$$x \hat{F}(x) + (-\alpha x + \beta + 1) \hat{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

إذا كانت $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ نحصل على كثيرة حدود لاجير .

الحالة الثالثة :

عندما تكون $s(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية يوجد لها ثلاث حالات مختلفة :

(1)- عندما يكون لها جذرين مختلفين تأخذ المعادلة (1) الشكل :

$$(1 - x^2) \hat{F}(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \hat{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

وهذه معادلة جاكوبي .

ولأجل قيم مختلفة لكل من α و β يكون :

- عندما $\alpha = \beta$ نحصل على كثيرة حدود جينجنباور .
- عندما $\alpha = \beta = 0$ نحصل على كثيرة حدود ليجندر .

■ عندما $\alpha = \beta = \mp \frac{1}{2}$ نحصل على كثيرة حدود تشبيشيف.

(2)- عندما يكون لها جذر مضاعف تأخذ المعادلة (1) الشكل :

$$x^2 \dot{F}(x) + [(\alpha + 2)x + \beta] \dot{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

إذا كان $\alpha = -1$ و $\beta = 0$ نحصل على كثيرة حدود بيسل .

(3)- عندما يكون لها جذور عقدية المعادلة (1) تأخذ الشكل :

$$(1 - x^2) \dot{F}(x) + (2\alpha x + \beta) \dot{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

وهي معادلة رومنسكي [2] .

كما إن مبرهنة ليوفيل-شتورم تخدم الفيزياء المتقدمة والهندسة وتأخذ معادلة القيمة الذاتية أحياناً الشكل العام لمرافق ذاتي وفق الصيغة :

$$LU(x) + \lambda W(x)U(x) = 0$$

حيث L المؤثر التفاضلي :

$$LU(x) = \frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] + q(x)U(x)$$

و λ هي القيمة الذاتية لها.

$W(x)$ هي دالة الوزن .

تحليل هذه المعادلة وحلولها يطلق عليها مبرهنة ليوفيل-شتورم .

والأشكال الخاصة ل $P(x)$ و $q(x)$ و $W(x)$ و λ تعطي المعادلات المعروفة لكل من ليجندر و هرميت ولاجير .

يوجد شبه ارتباط وثيق بين هذه المبرهنة والمفاهيم الجبرية الخطية الأخرى، فمثلاً الدوال تأخذ دور المتجهات في حين المؤثرات تأخذ دور المصفوفات والتقطير لمصفوفة متناظرة حقيقية تقابل حل معادلة تفاضلية عادي، تعرّف هذه المصفوفة من خلال مؤثر المرافق الذاتي حيث تكون الدوال الذاتية لها مستمرة والتي تقابل المتجهات الذاتية [2,3].

تدرس دوال ليجندر في معظم العلوم كما أسلفنا والتي تركز على المعادلات التفاضلية والدوال الخاصة، وهنا سوف نحصل على مصفوفة المؤثر التفاضلي لليجنر بالإضافة إلى القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

ومن شكل المتجهات نحصل على كثيرات حدود ليجندر ويمكن أن نطبق هذه الطريقة على كثيرات حدود أخرى مثل لاجير وهرميت وتشيبشيف [3,4,5,6].

كثيرات حدود ليجندر مع المصفوفة الجبرية :

كثيرة الحدود الجبرية العامة من الدرجة n لها الشكل :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad (2)$$

حيث إن: $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{R}$

تمثل على شكل متجه

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

كما إن المشتق الأول والثاني لكثيرة الحدود (2) هي :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &\rightarrow \frac{d}{dx} [\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n] \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots \\ &+ n\alpha_n x^{n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dx^2} &\rightarrow \frac{d}{dx} [\alpha_1 + 2\alpha_2x + 3\alpha_3x^2 + \dots \dots \dots \dots \\
 &\quad + n\alpha_nx^{n-1}] \\
 &= 2\alpha_2 + 6\alpha_3x + 12\alpha_4x^2 + \dots \dots \dots \dots \\
 &\quad + n(n-1)\alpha_nx^{n-2}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

التمثيل المصفوفي لمؤثر المشتق الأول :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ \dots \\ n\alpha_n \\ 0 \end{bmatrix}
 \tag{6}$$

أو

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

التمثيل المصفوفي للمشتق الثاني :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_2 \\ 6\alpha_3 \\ 12\alpha_4 \\ \dots \\ n(n-1)\alpha_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

أو

$$\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

نستبدل المعادلات (7) و(9) في مؤثر ليجنדר التفاضلي :

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$$

حيث إن :

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} &= (1 - x^2)[2\alpha_2 + 6\alpha_3x + 12\alpha_4x^2 \\ &+ \dots + n(n-1)\alpha_nx^{n-2}] \\ &- 2x[\alpha_1 + 2\alpha_2x + 3\alpha_3x^2 + \dots \\ &+ n\alpha_nx^n] \\ &= 2\alpha_2 + (-2\alpha_1 + 6\alpha_3)x \\ &+ (-6\alpha_2 + 12\alpha_4)x^2 + \dots \\ &+ (-n(n-1) - 2n)\alpha_nx^n \end{aligned}$$

نحصل على التمثيل المصفوفي لمؤثر ليجنדר التفاضلي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 12 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 20 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n(n-1) - 2n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_3 \\ -6\alpha_2 + 12\alpha_4 \\ -12\alpha_3 + 20\alpha_5 \\ \dots \\ n(n-1)\alpha_n \\ 0 \\ [-n(n-1) - 2n]\alpha_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

أو

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 12 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 20 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n(n-1) - 2n \end{bmatrix}$$

كمثال بسيط لناخذ مؤثر ليجندر التفاضلي من الرتبة 4×4 وهو يمثل المصفوفة :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \quad (12)$$

بما إن هذه المصفوفة هي مصفوفة مثلثية فإن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي عناصر القطر الرئيسي وهي :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -6, \quad \lambda_4 = -12$$

حيث القيم الذاتية تحقق المعادلة :

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

والمتجهات الذاتية المقابلة لهذه القيم هي حلول المعادلة :

$$(M - \lambda_i I)v = 0$$

حيث v المتجه الذاتي:

$$v = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 - \lambda_i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 - \lambda_i & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 0$ في المعادلة (13) نحصل :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر $P_0(x) = 1$.

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$ في المعادلة (13) نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها :

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر : $P_1(x) = x$.

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_3 = -6$ في المعادلة (13) نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها :

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر: $P_2(x) = \frac{(3x^2-1)}{2}$

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_4 = -12$ في المعادلة (13) نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها :

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر: $P_3(x) = \frac{(3x^3 - 3x)}{2}$

لأجل أي قيمة $n = 0, 1, 2, \dots$ في صيغة رودريج $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$

وأخيراً هنا تم الحصول على كثيرات حدود ليجندر بطريقة مباشرة باستخدام مفاهيم الجبر الخطي الأساسية مثل القيمة الذاتية والمتجه الذاتي لمصفوفة، بمجرد الحصول على المصفوفة المقابلة للمؤثر التفاضلي لليجنر يتم العثور على القيم الذاتية لهذه المصفوفة والمتجهات الذاتية التي تقابل هذه القيم التي تتوافق مع معاملات كثيرات حدود ليجندر وتم الحصول على ما سبق بطريقة لا تستخدم الطرائق الكلاسيكية والتي تعتمد على حل معادلة ليجندر باستخدام متسلسلات القوى وصيغة رودريج والدالة المولدة .

اقتراحات و توصيات :

نوصي باستخدام هذه الطريقة التي تم اتباعها في هذا البحث على كثيرات حدود أخرى مثل كثيرات الحدود المتعامدة وخاصة كثيرات الحدود الكلاسيكية تشيبيشيف – لاجير – هرميت – جاكوبي .

المراجع :

- [1] L. C. Andrews, Special functions of mathematics for engineers, SPIE, USA, (1998)
- [2] A. P.Raposo et al., Romanovski polynomials in selected physics problems, Central European journal of physics, 5(3), (2007), 253-284
- [3] V. Aboites, Laguerre polynomials and linear algebra, Memorias sociedad Matematica Mexicana 52 (2017), 3-13.
- [4] V. Aboites, Hermite polynomials through linear algebra, International Journal of Pure and Applied Mathematics 114 (2017) , 401-406.
- [5] V. Aboites , Easy Route to tchebycheff polynomials, Rev . Mex. Fis., (2018)
- [6] M. Ramirez, Simple Approach to Gegenbauer polynomials, International Journal of Pure and Applied Mathematics , (2018) Ref . AP2017-31-5266,
- [7] أ. د. موفق دعبول – نظرية المعادلات – الطبعة الثانية – جامعة دمشق
1991-1992
- [8] أ. د . محمد بن عبد الرحمن القويز – الطرائق الرياضية في تحليل فورييه –
1997-1998

دراسة مقارنة تآكل سبيكة (نيكل - فوسفور)

النانو بلورية وشبه البلورية وغير المتبلورة

عبد الناصر ابي زمر⁽¹⁾، ا.د. محمود عامر⁽²⁾، د. عصام علوان⁽³⁾

(1) طالب ماجستير، كلية العلوم، قسم الكيمياء، جامعة البعث

(2) الدكتور المشرف، كلية العلوم، قسم الكيمياء، جامعة البعث

(3) مدرس، قسم علوم وهندسة المواد، المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،

دمشق

الملخص

تم في هذا البحث ترسيب طبقة طلاء سبيكة (نيكل-فوسفور) على ثلاثة نماذج من الفولاذ متوسط الكربون في ثلاثة أحواض مختلفة في التركيب وشروط الترسيب، وقد تم استخدام تقنيات (XRD-EDX-SEM) من أجل توصيف طبقات الطلاء، حيث أظهرت الحصول على بنية نانو بلورية بتركيب كيميائي (Ni-5P) ومتوسط حجم حبيباتها (39.1nm) للعينة الأولى، وبنية شبه بلورية بتركيب كيميائي (Ni-7P) للعينة الثانية، وبنية غير متبلورة بالكامل وبتراكيب كيميائي (Ni-12P) للعينة الثالثة. تم إجراء اختبارات التآكل (فقدان الوزن والاستقطاب الخطي) للمعدن الأساس و للنماذج الثلاثة المطلية في ثلاثة أوساط أكالة، فقد بينت هذه الاختبارات مقاومة تآكل ممتازة للبنية النانو بلورية في ماء الصنبور والوسط الملحي (3wt.% NaCl)، بينما في الوسط الحمضي (3V.% HCl) لم تظهر البنية النانو بلورية سلوك تخميل ملاحظ.

الكلمات المفتاحية: نيكل ، فوسفور ، الترسيب الكهربائي ، بنية بلورية، معدل التآكل.

A comparative Study of Corrosion between Nanocrystalline, Semi- crystalline and Amorphous structure for (Ni-P) Alloy

Abd Alnaser Abi Zamr, Dr. Mahmoud Amer, Dr. Issam Elwan

Abstract

In this work electrodeposited layer of (Ni-P) alloy coating from baths of different composition and precipitation conditions is performed on samples of middle carbon steel, (EDX ,SEM ,XRD) technique is used to description the films. Which is showed that nanocrystalline structure (Ni-5P) and grain size(39.1nm) for sample1, and semi-amorphous structure (Ni-7P) for sample2 , and amorphous structure (Ni-12P) for sample3. Corrosion tests were carried out (weight loss, Linear Polarization) for different coatings layer and base metal in (Tap water, (3wt.%NaCl), and (3V.%HCl)), it was found that a significant superiority corrosion resistant of nanocrystalline structure in tap water and brine media , but it did not appear clear passivation behavior in acidic media.

Keywords:

Nickel, phosphorus, Electrodeposited, crystalline structure, Corrosion Rate

1- مقدمة :

تعد عملية التآكل من المشاكل الأساسية المهمة التي تواجه المهندس في ميدان العمل، إذ إنّ المعدات التي تتلف سنوياً بسبب عملية التآكل تقدر بمليارات الدولارات، لذا فمن الضروري دراسة هذه الظاهرة وبيان العوامل المسببة لحدوثها والأساليب الكفيلة للسيطرة عليها [1]. إلى جانب الأهمية الاقتصادية للتآكل، فإن له تأثير هائل على البيئة بمعنى أن تآكل خطوط أنابيب النفط أو الغاز أو التسرب في خطوط الأنابيب والخزانات و فقدان المنتجات المكلفة يمكن أن يكون لها تأثير ضار جداً على البيئة في شكل تلوث المياه والهواء [2]. يمكن أن يُعرف التآكل (Corrosion) بأنه تلف (جزئي أو كلي) يحدث من حيث المظهر والأداء للسبيكة أو الفلز نتيجة التفاعل الناشئ بين المعدن مع الوسط المحيط (Environment) الذي يكون في حالة تلامس مباشر معه، سواء أكان هذا الوسط هو الهواء الجوي العادي أو أي محيط كيميائي آخر وفي أي درجة حرارة [3].

تعددت أنواع التآكل وكثرت أسبابه فقد رافقت الصناعة أضراره وكوارثه منذ الأزمنة البعيدة وتضاعفت تأثيراته إذ تتزامن مع عوامل أخرى، لذا كانت الحماية من التآكل هاجساً طالما أرقّ الصناعيين. هناك العديد من الطرائق التي من الممكن استخدامها للحماية من التآكل اعتماداً على نوع التآكل وعلى الظروف التي يحدث فيها. فاختيار الطريقة المناسبة يتم على أساس كفاءة هذه الطريقة في كل الحالات العملية فضلاً عن العامل الاقتصادي [4]. ومن أهم هذه الطرائق الطلاء الكهربائي (Electroplating) وهو عبارة عن ترسيب طبقة من المعدن المراد الطلاء به خلال عملية تحليل كهربائي

لمحلول يحتوي على ملح المعدن الذائب فيه، لذلك يكتسب سطح المعدن الأصلي مواصفات وخواص المعدن الجديد (المطلي به).

يمثل الطلاء الكهربائي تغطية لسطوح المعادن وبصورة خاصة الفولاذ وذلك لأغراض تجميلية وإنهاء سطحي جيد ، فضلاً عن الهدف الأساسي من عملية الطلاء ألا وهو الحماية من التآكل [5]. وتعتمد عملية التحليل الكهربائي على تشكيل الخلية الالكتروليتيّة والتي تتضمن القطب الموجب (Anode) وهو القطب الذي يحمل شحنة موجبة وعنده تحصل عملية التأكسد (فقدان الالكترونات)، والقطب السالب (Cathode) وهو القطب الذي يحمل شحنة سالبة وعنده تحصل عملية الإرجاع (اكتساب الالكترونات)، والالكتروليت (Electrolyte) وهو الوسط الموصل حيث يكون فيه جريان التيار مصحوباً بحركة المادة. وأيضاً تحتوي المحاليل الالكتروليتيّة عادة على أملاح المعدن المراد ترسيبه بشكل ذائب فضلاً عن ملح يزيد من قابلية المحلول على التوصيل الكهربائي، وقد تكون هذه المحاليل حامضية أو قاعدية (حسب طريقة الطلاء).

تعد السلسلة الكهروكيميائية قاعدة أساسية في عملية الطلاء الكهربائي حيث أنها تتضمن جهود الأقطاب القياسية للمعادن التي توضح بصورة تقريبية المعادن التي تترسب بشكل أسهل ، وهذا يعني أن المعادن ذات الجهد موجب القيمة لها الأفضلية في الترسيب على المعادن ذات القيمة السالبة للجهد. لقد تطوّر الطلاء الكهربائي في الآونة الأخيرة من مجرد فن وزخارف إلى علم حقيقي، هذا التطور يعد نتاجاً طبيعياً لزيادة وتنوع المجالات التي يطبق فيها هذا الجزء من العلوم التطبيقية والهندسية [5].

(PROMAX) يمكنه إعطاء تيار يتراوح A(0-6)، أما فرق الجهد المعطى يتراوح V(0-20). يتم قياس الـ pH باستخدام جهاز (744 pH Meter) المجهز من شركة (Ω Metrohm) السويسرية و دقته 0.01 . استخدمنا ثلاثة تراكيب كيميائية مختلفة لأحواض الطلاء، وكانت المواد الكيميائية المستخدمة جميعها من النوع عالية النقاوة والماء المستخدم لتحضير الأحواض ماء ثنائي التقطير، و في البحث الحالي كان سماكة طبقة الطلاء المنجزة بحدود ($32 \pm 2 \mu\text{m}$) حسب شروط الترسيب.

الجدول (1): مكونات أحواض الطلاء وشروط الترسيب المستخدمة في البحث الحالي.

م	التركيب الكيميائي g/l	شروط الترسيب
a	(NiSO ₄ .6H ₂ O =150) (NiCl ₂ =45) (H ₃ BO ₃ =37) (NaH ₂ PO ₂ .H ₂ O =10) (Saccharine =5)	كثافة التيار =A/dm ² (6)، درجة الحرارة =C(70±5) pH = 4-5 ، زمن الطلاء =26 min . التحريك المغناطيسي =400 rpm
b	(NiSO ₄ .6H ₂ O =150) (NiCl ₂ =45) (H ₃ BO ₃ =37) (NaH ₂ PO ₂ .H ₂ O =15)	كثافة التيار =A/dm ² (2)، درجة الحرارة =C(70±5) pH = 1-2 ، زمن الطلاء =78 min . التحريك المغناطيسي =200 rpm
c	(NiSO ₄ .6H ₂ O =150) (NiCl ₂ =45) (H ₃ BO ₃ =37)	كثافة التيار =A/dm ² (2)، درجة الحرارة =C(70±5)

. زمن الطلاء = 78 min ، pH = 1-2	(NaH ₂ PO ₂ .H ₂ O = 30)	
التحريك المغناطيسي = 200 rpm		

أما الاختبارات التي تم تنفيذها في البحث الحالي فكانت على الشكل الآتي:

1- اختبار المجهر الالكتروني الماسح (SEM) -2- اختبار حيود الأشعة السينية

(XRD)-3- مطيافية الأشعة السينية المتبعثرة طاقياً (EDX)

4- اختبار التآكل الكيميائي (طريقة فقدان الوزن): حيث يتم غمر عينات الفولاذ

المطلية وغير المطلية في ثلاثة أوساط حتى زمن معين واعتماداً على نوع المحلول

الالكتروليتي. و يتم قياس أوزان العينات بواسطة الميزان الحساس وحساب المساحة

السطحية لكل منها قبل غمرها في المحاليل وبعد أزمنة متباينة يتم اخراج العينات من

المحاليل وتنظف بالماء المقطر والكحول وتجفف ويتم حساب التغير بالوزن لوحد

المساحة $(\frac{\Delta W}{A})$ حيث يتم أخذ عدة قراءات وصولاً الى أقصى مدة زمنية ثم جرى

رسم العلاقة بين التغير بالوزن لوحد المساحة مقابل زمن الغمر .

5- اختبار التآكل الكهروكيميائي (طريقة الاستقطاب الخطي): تم اجراء اختبار التآكل

الكهروكيميائي باستخدام جهاز نوع (Mlab 200 potentistat Banch Elektronik)

والمنشأ ألماني عند معدل سرعة تساوي 3mv/sec يتكون الجهاز من خلية القياس

وأقطابها حيث تصنع الخلية من مواد غير قابلة للتآكل كالزجاج وتكون بشكل كروي

سعتها واحد لتر وتحتوي على فوهات مختلفة لوضع الأقطاب، فالخلية تتضمن ثلاثة

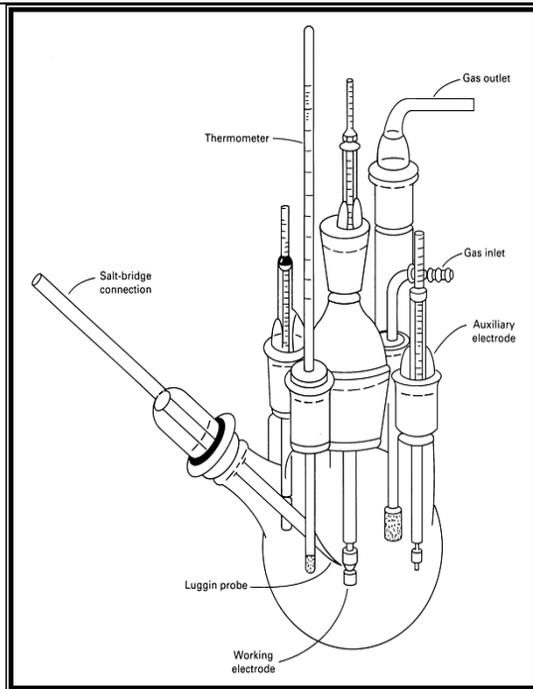
أقطاب هي:

1-القطب العامل(Working Electrode) وهو القطب الموجب الذي يمثل عينة

الفولاذ متوسط الكربون، حيث استخدم سلك معدني طوله(20cm) وتم ربطه بعينة

الفولاذ ذات الأبعاد (1.5×1.5×0.2cm). -2- القطب المساعد (Auxiliary

(Electrode) وهو القطب السالب الذي تتجمع عنده الالكترونات التي تحررت من المصعد وقد استخدم عنصر البلاتين كقطب في هذه الخلية -3-القطب المرجع(Reference) وهو قطب الكالوميل المشبع(saturated calomel) الذي يربط الخلية من خلال توصيل معين. أجريت هذه التجارب في محلول حمض كلور الماء (3V.%HCl)، ومحلول كلوريد الصوديوم (3wt.%NaCl) وماء الصنبور(Tap water). يوضع (750ml) من المحلول في خلية القياس ثم توضع الأقطاب المساعدة والقطب المرجع المملوء بمحلول الخلية، بعدها يهيا القطب العامل بغسله بالكحول ثم يغمر في خلية القياس بعد ذلك يضح غاز النيتروجين إلى خلية القياس ، ثم يتم فتح الدائرة الكهربائية (Open circuit) و إمرار تيار كهربائي عند جهد يتم تحديده حسب موقع المعدن في السلسلة الكهروكيميائية وقد وجد بأن الجهد هو(-0.44mv) وبعدها يتم غلق الدائرة ويمرر التيار بجهد ($100\pm mv$) عن الجهد الذي تم تحديده وعند حدوث تغيير في الجهد يشير الى أن التآكل قد حدث ويتم قياس التيار عند هذا الجهد من خلال مماسات التقاطع للقطب المصعدي والمهبطي وفق طريقة تافل وحساب معدل التآكل. ويتم رسم منحنيات الاستقطاب المصعدي والمهبطي آلياً بواسطة الحاسب المتصل مع جهاز الكمون الساكن (Potentionstat).



الشكل(1): الخلية الكهروكيميائية التي تستخدم في رسم منحنيات الاستقطاب [8].

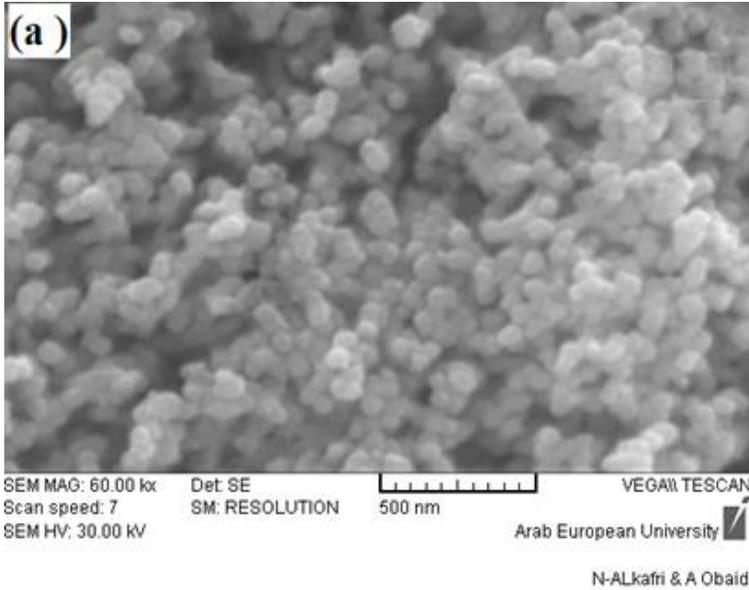
الجدول(2): التركيب الكيميائي لماء الصنبور العادي .

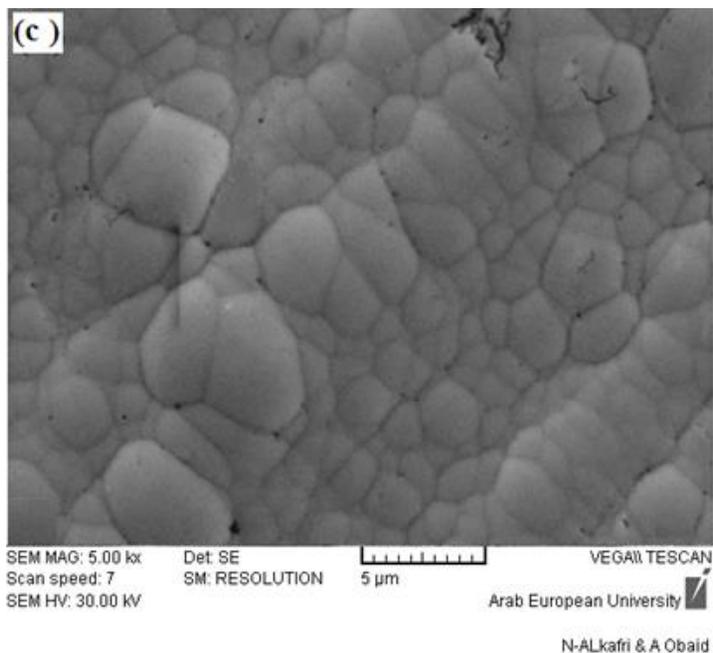
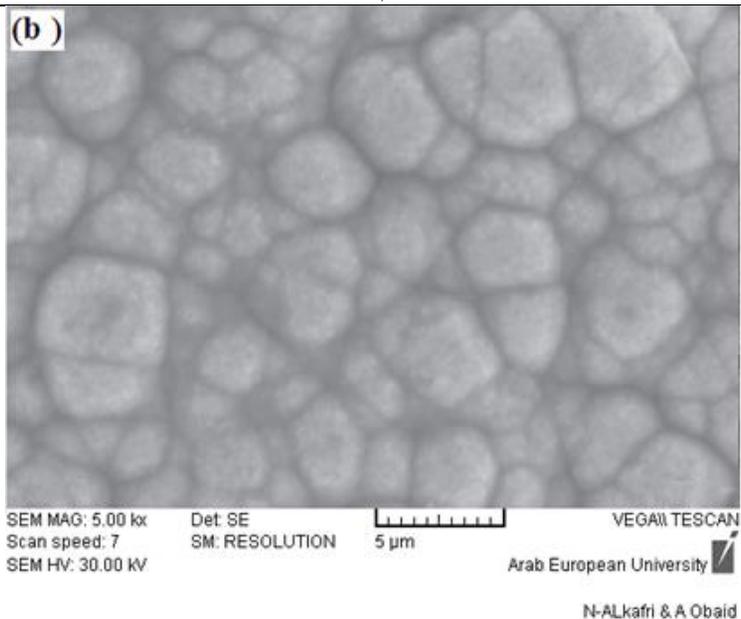
التركيز (mg/l)	المركب
1.5	PO_4^{3-}
230.6	SO_4^{2-}
71	Cl^-
7.7	pH

4- النتائج ومناقشتها:

1-نتائج تحليل(SEM): يبين هذا التحليل تضاريس طبقات الطلاء للعينات الثلاثة، إن شكل الترسيب الكهربائي للنikkel فوسفور يظهر بوضوح في جميع العينات المرسبة في تشكيل فريد مميز على شكل القرنبيط (cauliflower) والذي يعد من خصائص

الترسيب الكهربائي لسبيكة $^{191}(\text{Ni-P})$ ، وهو عبارة عن حبيبات عقدية كروية أو نصف كروية من نويات النيكل والفوسفور تترسب جنبًا إلى جنب وموزعة بانتظام على السطح، السبب الرئيسي لتكون مثل هذا التشكيل هو ميل رواسب النيكل فوسفور لتكوين شكل كروي من أجل تقليل الطاقة السطحية . وتتميز الكرات الموجودة في هذه الطلاءات بأحجام مختلفة ويتغير متوسط أحجامها مع تغير حالة محلول الطلاء. و من البرامج التي تستعمل لتحليل الصور استخدمنا برنامج (Image -J) الذي يزودنا بملخص متوسط الحجم الحبيبي لبلورات لسبيكة (Ni-P) النانو بلورية في العينة (a) حيث كانت بحدود (70-30 nm).





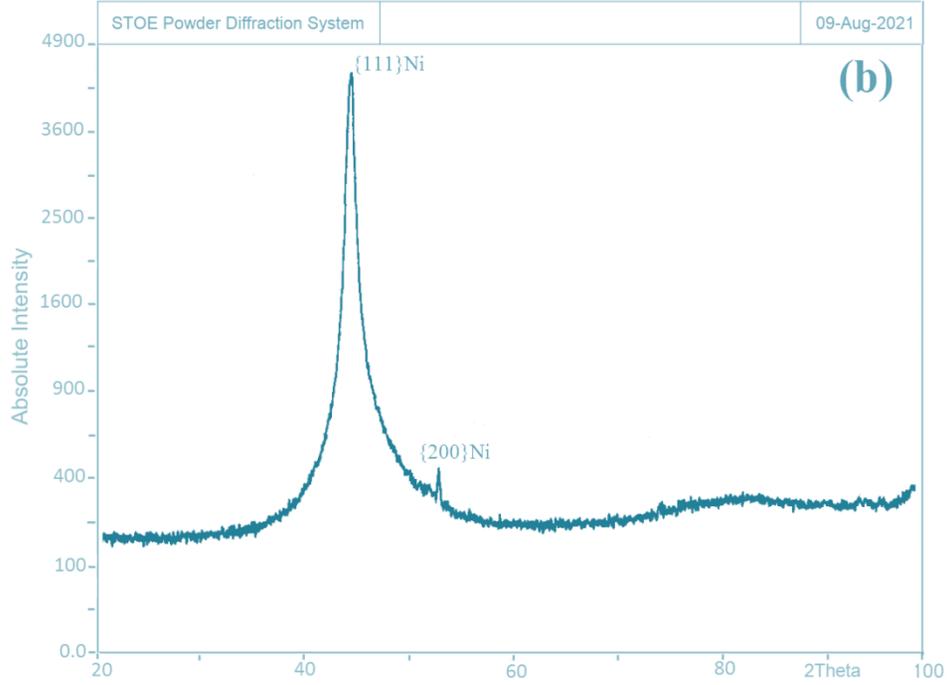
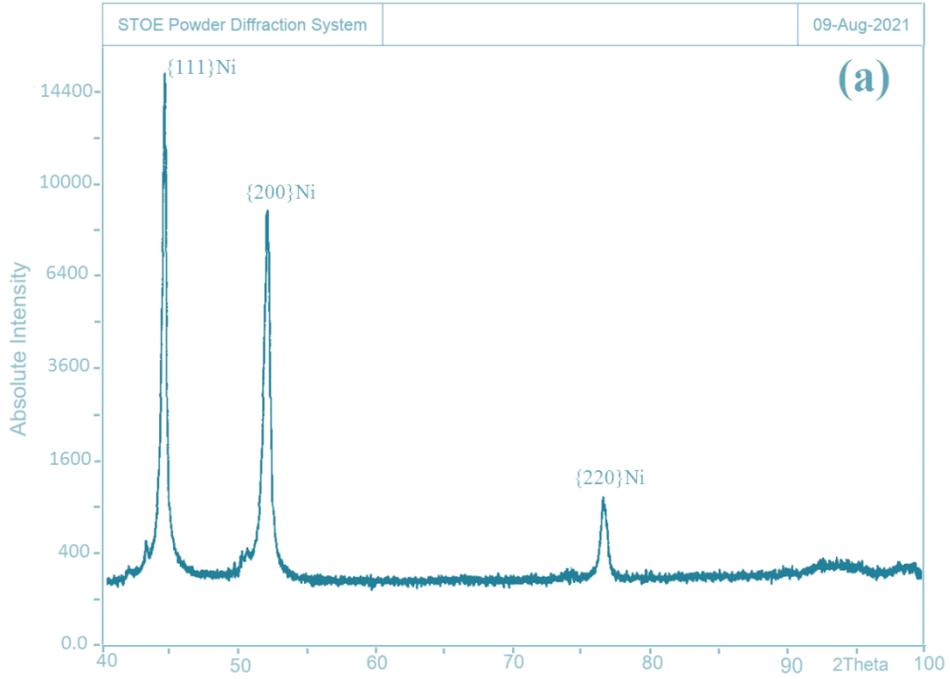
الشكل (2): صور المجهر الالكتروني الماسح لطبقات طلاء العينات الثلاث a,b,c

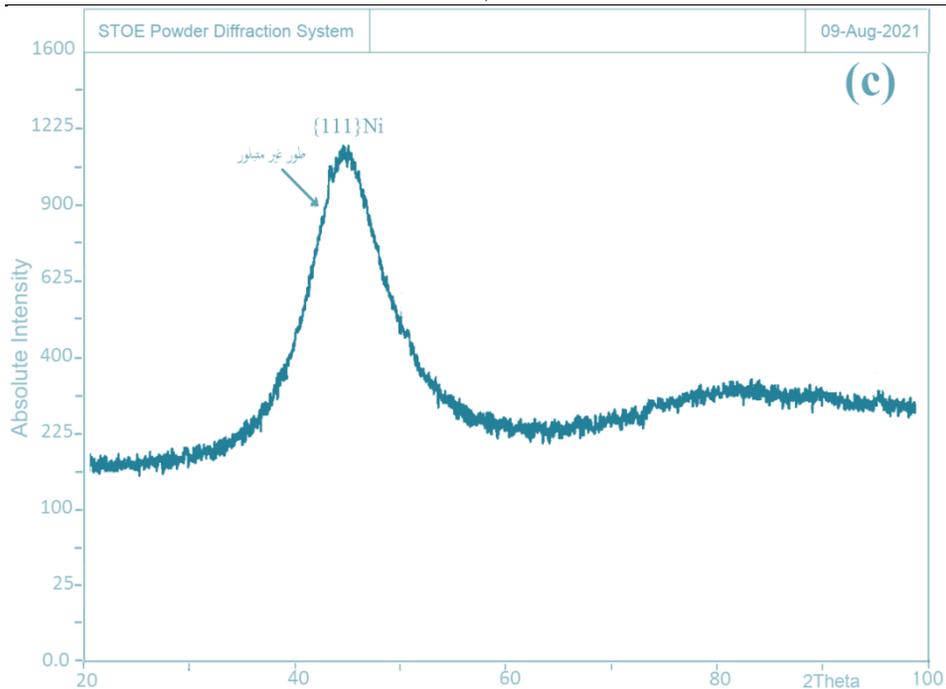
2-نتائج تحليل (XRD):

نلاحظ من أنماط حيود الأشعة السينية عدم وجود أية إشارة حيود لمعدن الحديد (الركيزة الأساسية) في كل العينات المطلية وهذا يدل على أن سطح العينات مطلى بالكامل بسبيكة (Ni-P). وأيضاً نلاحظ عدم وجود أية قمة عائدة إلى عنصر الفوسفور كما هو متوقع وذلك لأن الفوسفور يكون مذاب في النيكل على شكل محلول صلب من السبيكة (Ni_xP) في حالة الترسيب مع النيكل. أظهرت نتيجة تحليل (XRD) لعينات (Ni-P) المرسبة أن البنية المجهرية لعينة الطلاء (a) نانو بلورية ولعينة الطلاء (b) شبه بلورية ولعينة الطلاء (c) غير متبلورة بالكامل. تم تحديد الحجم الحبيبي من X-ray (Cu-Kα, λ = 1.5406 Å) توسع القمة للمستوي (111) وعرض الخط الطيفي عند منتصف الارتفاع لقمة الحيود الأعلى شدة (111) حسب معادلة شيرر (Scherrer equation) حيث بلغ الحجم البلوري لهذا لطلاء في العينة (a) (39.1 nm) وهذا يتطابق مع صور المجهر الإلكتروني الماسح. كما نلاحظ في جميع العينات هناك قمة حيود قوية ورئيسية عند زوايا الحيود $2\theta = 44.4^\circ$ توافق طور النيكل النقي (Ni(111) المتميز ببنية بلورية (FCC) وذلك حسب البطاقة (JCPDS No. 03-1051). كما يوجد في نمط انعراج العينة (a) قمتين عند زوايا الحيود $2\theta = 51^\circ, 77^\circ$ وحسب البطاقة (JCPDS No.88-2326) فإنهما تعودان لـ Ni(200), Ni(220) على التوالي وهذا يدل على وجود الطور النانو بلوري للنيكل (nano crystalline) ^[10]، والذي يحسن بشكل كبير الخصائص الميكانيكية للفولاذ متوسط الكربون كالمساواة العالية ومقاومة تآكل أفضل، ومن الصعب رؤية هاتين القمتين في نمط الانعراج للعينتين (b,c) وهذا ربما يعود إلى الانخفاض الكبير للنسبة المئوية للنيكل في الأطوار النانوبلورية لهاتين العينتين بالمقارنة مع العينة (a) وهذا يؤدي إلى توسيع قمة Ni(111) في العينة (b) واختفاء القمتين العائدتين لـ Ni(200), Ni(220) في العينة (c). حيث ظهرت في نمط انعراج العينة (b) قمة

حيود ضعيفة الشدة عند زاوية الحيود $2\theta=51^\circ$ والتي تعود للمستوي Ni(200) الذي يثبت وجود الطور النانوبلوري وأيضاً ظهرت قمة حيود عريضة أو منتشرة في الموضع الزاوي $2\theta=40^\circ-52^\circ$ التي تعود إلى الطور غير المتبلور للمستوي Ni(111) وبالتالي أصبحت البنية المجهرية للعينة (b) بنية شبه بلورية (semi-amorphous) ^[11]، وهي عبارة عن مزيج من الطور البلوري والطور غير المتبلور. كما يلاحظ أن الامتصاص يزداد وتصبح القمم أكثر حدة بتناقص محتوى الفوسفور في طبقة الطلاء بينما يزداد الحجم البلوري للنikkel .

تدل القمة العريضة في نمط انعراج العينة (c) في الموضع الزاوي بين 40° to 52° على وجود الطور غير المتبلور بالكامل (amorphous) للعينة (c) ^[12].



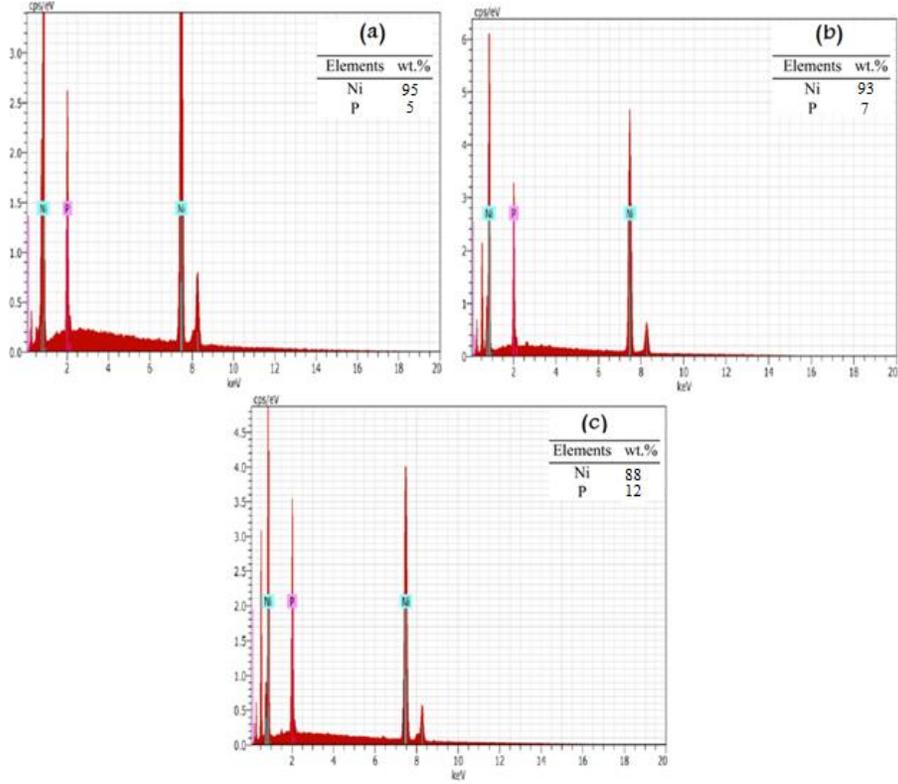


الشكل(3): أطياف حيود الأشعة السينية لطبقات طلاء (Ni-P) على معدن الفولاذ

متوسط الكربون لعينات الطلاء a,b,c

3-نتائج تحليل (EDX):

يظهر هذا التحليل النسب المئوية للنیکل والفوسفور التي تتشكل منها هذه الطبقات.



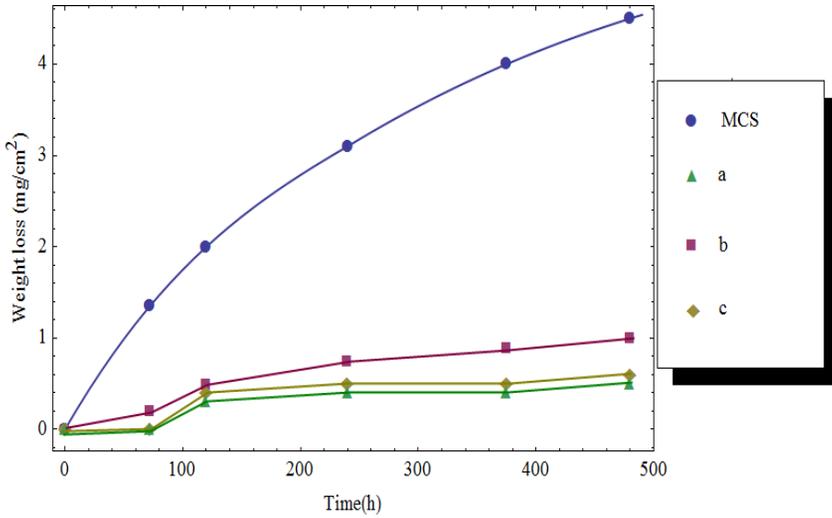
الشكل(4): بيانات تحليل EDX لطبقات الطلاء المرسبة على العينات a,b,c

4- نتائج اختبار التآكل الكيميائي بطريقة فقدان الوزن:

أولاً- ماء الصنبور (Tap Water):

أظهر المعدن الأساس (الفولاذ متوسط الكربون) نقصاناً مستمراً بالوزن بزيادة فترة التعرض لماء الصنبور. ويعزى ذلك الى أن نواتج التآكل المتكونة خلال فترة التعرض هذه لا توفر الحماية لسطح الفولاذ، لذلك كان لزاماً البحث عن وسيلة لحماية سطح الفولاذ. أما العينات (Ni-5P), (Ni-7P), (Ni-12P) فأظهرت فقدان مستمر في الوزن مع زيادة زمن الغمر في الماء ولكن بمعدلات بسيطة جداً، ويعزى ذلك لوجود مسامات وتشققات بنسب مختلفة في طبقات الطلاء. كما أظهر هذا الاختبار أن أقل

معدل تآكل يعود للعينة (Ni-5P) المتميزة ببنية نانو بلورية حيث بلغ معدل التآكل بعد فترة عمر 20 يوم 0.5 mg/cm^2 أما العينة (Ni-7P) المتميزة ببنية شبه بلورية فقد كان معدل تآكلها هو الأكبر بين العينات المطلية حيث بلغ 1 mg/cm^2 . وبالتالي يمكن ترتيب مقاومة تآكل العينات المطلية بسببكية (Ni-P) في الماء العادي حسب التسلسل الآتي: $(\text{Ni-5P}) > (\text{Ni-12P}) > (\text{Ni-7P}) > \text{MCS}$

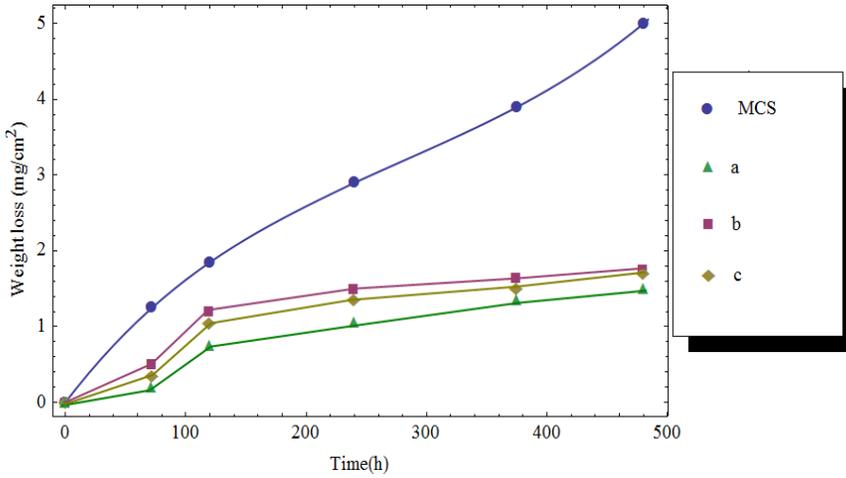


الشكل (5): تأثير فترة التعرض لماء الصنبور في الوزن المفقود لعينات الفولاذ الكربوني بدون طلاء وللعينات المطلية بسببكية (Ni-5P), (Ni-7P), (Ni-12P) ثانيًا - المحلول الملحي (3wt% NaCl):

أبدت دراسة عينة الفولاذ الكربوني بدون طلاء نقصاناً مستمراً بالوزن بشكل عام بينما كانت طبقات الطلاء الثلاثة تبدي نقصان مستمر بشكل بسيط مع الزمن مع زيادة فترة التعرض للمحلول الملحي كما تم ملاحظة ان طبقة الطلاء (Ni-5P) كانت أقل الطبقات فقداناً للوزن وهذا يتطابق مع كون البنية النانو بلورية الذي تتميز به هذه الطبقة تمثل افضل طور لحماية المعدن من التآكل في الوسط الملحي (3wt% NaCl)، بينما

طبقات الطلاء (Ni-7P), (Ni-12P) فقد كان معدل تأكلها اكبر ولكن بدرجة بسيطة وبمقارنة مع تعرض العينات الى ماء الصنبور فإن معدل الفقدان هنا أكثر من نظيره في ماء الصنبور ويمكن أن يعزى الى زيادة ناقلات الشحنة الناتجة عن تأين الملح و بالتالي تفاعل أيونات الكلوريد Cl^- مع المعدن بشدة وتشكل مركبات على السطح تؤدي مستقبلاً إلى التآكل النقري. وبالتالي يمكن ترتيب مقاومة التآكل في المحلول الملحي

حسب التسلسل الآتي: $(Ni-5P) > (Ni-12P) > (Ni-7P) > MCS$



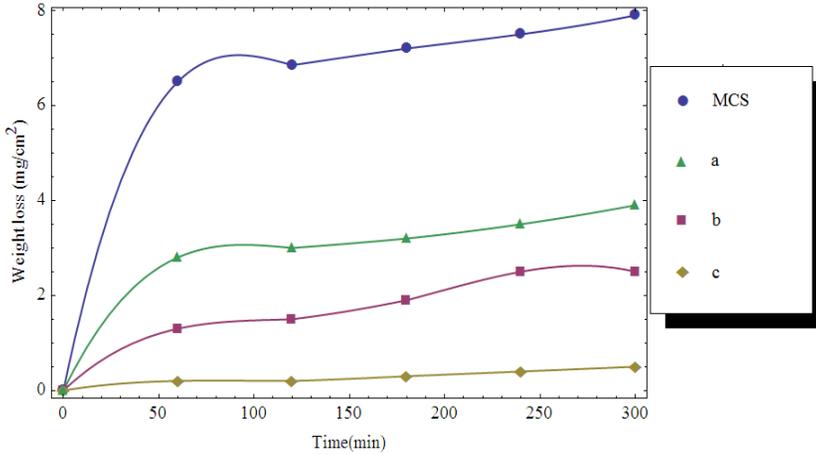
الشكل(6): تأثير فترة التعرض لمحلول (3wt% NaCl) في الوزن المفقود لعينات الفولاذ الكربوني بدون طلاء والعيّنات المطلية بسببكية (Ni-5P), (Ni-7P), (Ni-12P)

ثالثاً- المحلول الحمضي (3V.%HCl):

أظهرت طبقات الطلاء مرة أخرى نقصاناً مستمراً في الوزن مع زيادة فترة التعرض. ومقارنة بقيمة الفقدان في المحلول الملحي و الماء العادي فإن ما تفقده هذه النماذج في دقائق بالمحلول الحمضي أكثر مما تفقده في أيام. ان الزيادة الكبيرة في الفقدان بالوزن في المحلول الحمضي مقارنة ببقية الأوساط يعزى بشكل أساسي إلى وجود

أيونات الهيدروجين الموجبة (H^+) التي تعمل على تصريف الالكترونات وتسريع التفاعل. أظهرت النتائج تفوق طبقة الطلاء للعينة (Ni-12P) وذلك بتحقيقها أدنى معدل للتآكل بين العينات المطلية. أما الفقدان المستمر بالوزن لطبقات الطلاء (Ni-7P) و (Ni-5P) فهذا يتطابق مع حقيقة كون طبقات الطلاء هذه تحتوي على نسبة أعلى من المسامية، إذ تمثل هذه المسامية مواقع او ممرات لحركة الأيونات ثم زيادة في معدل الفقدان. وبالتالي يمكن ترتيب مقاومة التآكل في المحلول الحمضي حسب التسلسل الآتي:

$$(Ni-12P) > (Ni-7P) > (Ni-5P) > MCS$$

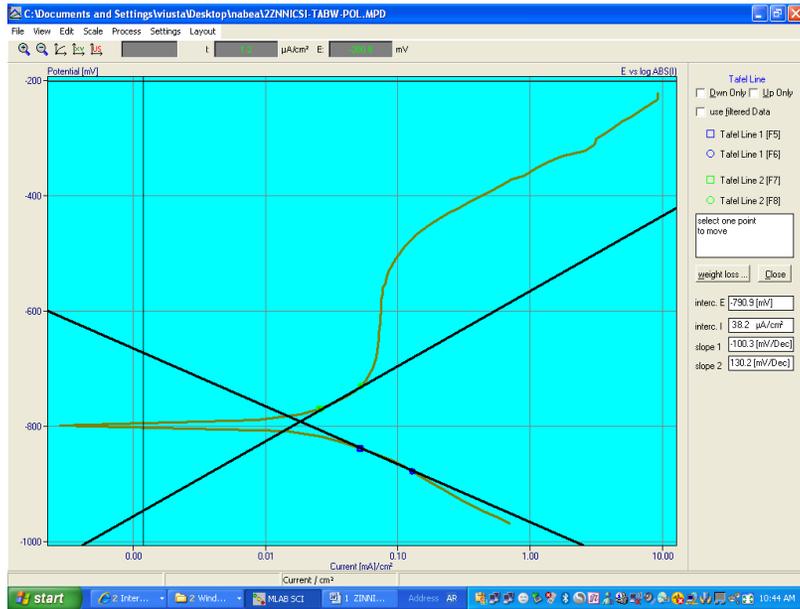


الشكل(7): تأثير فترة التعرض لمحلول (3V.% HCl) في الوزن المفقود لعينات الفولاذ الكربوني بدون طلاء وللعينات المطلية بسبيكة (Ni-5P), (Ni-7P), (Ni-12P)

5- نتائج اختبار التآكل الكهروكيميائي بطريقة الاستقطاب الخطي:

أولاً- ماء الصنبور (Tap Water): قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لـ (MCS) كالاتي: $I_{corr} = 38.2 \mu A/cm^2$ ، $E_{corr} = -790.9 mV$

إن التآكل الحاصل للنموذج الفولاذي المغمور في ماء الصنبور ظاهرة متوقعة، حيث أن المياه الاعتيادية ممكن اعتبارها وسط قاسٍ للعديد من المعادن والسبائك ولاسيما الفولاذ الكربوني ويعزى ذلك لوجود الغازات المذابة (Dissolved gasses) والأملاح المذابة (Dissolved salts) فضلاً إلى وجود المكونات الصلبة (Solid components) [13]



الشكل (8): منحنيات الاستقطاب لعينة الفولاذ متوسط الكربون في ماء الصنبور

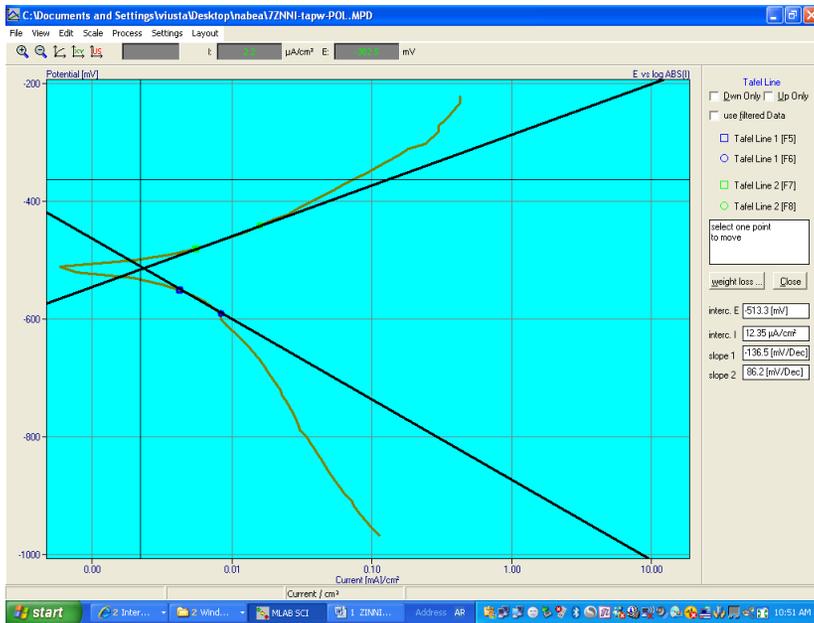
أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء سبيكة (Ni-5P) كالاتي: $E_{corr} = -513.3 mV$ ، $I_{corr} = 12.35 \mu A/cm^2$

ويلاحظ أن مقاومة تآكل طلاء سبيكة (Ni-5P) كانت اكبر من مقاومة تآكل الفولاذ من دون طلاء.

أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء

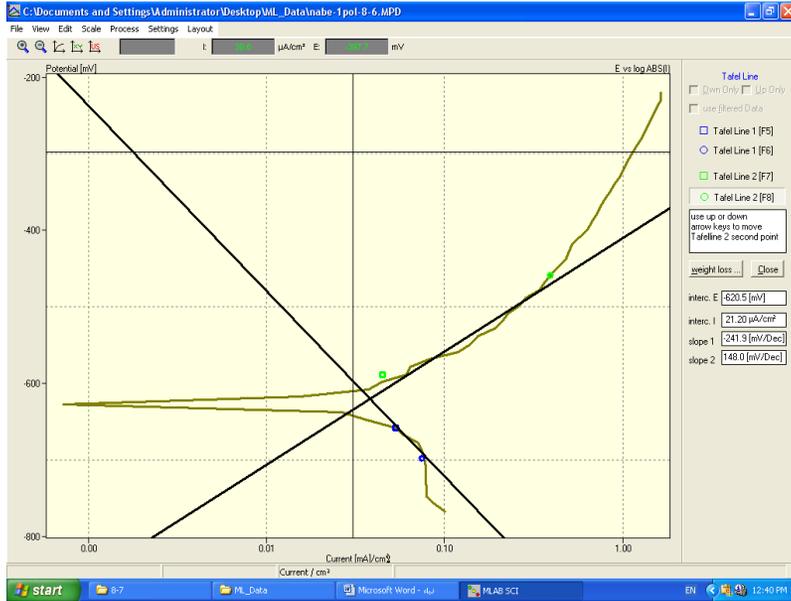
سبيكة (Ni-7P) كالاتي: $E_{corr} = -620.5\text{mV}$, $I_{corr} = 21.2\mu\text{A/cm}^2$

ويلاحظ أن مقاومة التآكل العينة (Ni-5P) كانت أكبر من مقاومة تآكل كل من العينة (Ni-7P) والفولاذ من دون طلاء.



الشكل (9): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-5P) في ماء الصنبور.

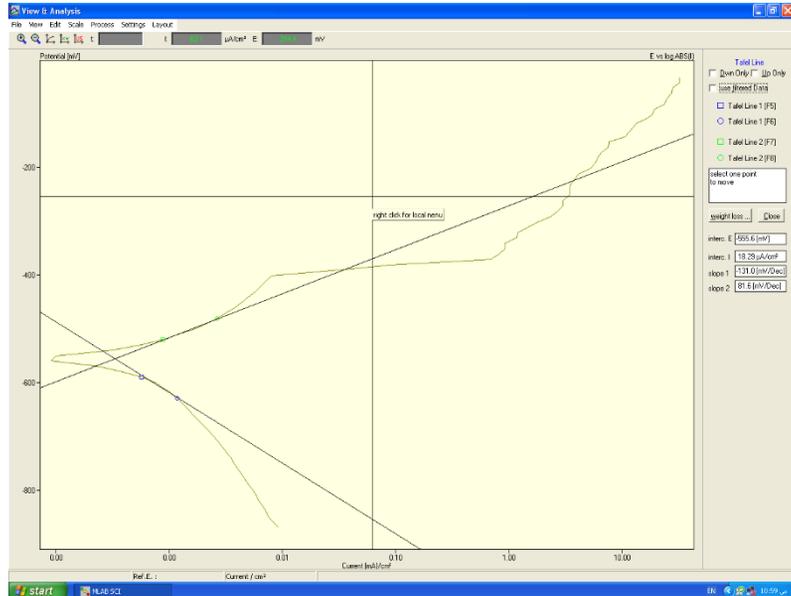
دراسة مقارنة تآكل سبيكة (نيكل- فوسفور) النانو بلورية وشبه البلورية وغير المتبلورة



الشكل (10): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-7P) في ماء الصنبور .

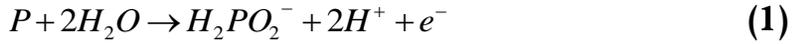
أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء

سبيكة (Ni-12P) كالاتي: $E_{\text{corr}} = -555.6 \text{ mV}$, $I_{\text{corr}} = 18.29 \mu\text{A}/\text{cm}^2$



الشكل (11): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-12P) في ماء الصنبور.

يلاحظ أن مقاومة التآكل لطلاء سبيكة (Ni-5P) كانت أفضل من مقاومة التآكل لكل من طلاء سبيكة (Ni-7P) و (Ni-12P) و نلاحظ ان البنية المجهرية النانو بلورية لعينة الطلاء (Ni-5P) أدت إلى انحلال النيكل بشكل مميز عند فتح الجهد الكهربائي للدارة مؤدي إلى إغناء الفوسفور للطبقة السطحية ، حيث يتفاعل فوسفور الطبقة السطحية مع الماء ليشكل أيونات هيبوفوسفيت الممتزة ، وهذه الطبقة تمنع تزويد جزيئات الماء لسطح الالكترود وبذلك يتم كبح هيدروجين النيكل الذي من المفترض أن يكون أول مرحلة من تشكيل أنواع النيكل Ni^{2+} المنحلة [14].



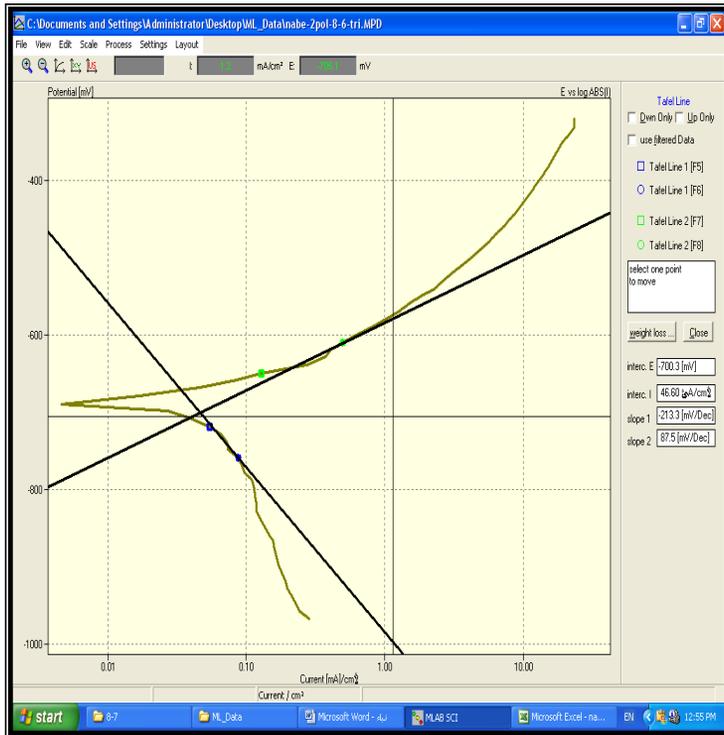
وبناءً على ما سبق فإن قيم التحسن في مقاومة التآكل تبعاً لنوعية الطلاء تأخذ التسلسل الآتي:

$$(Ni-5P) > (Ni-12P) > (Ni-7P) > MCS$$

ثانياً-المحلول الملحي (3wt% NaCl):

قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لـ(MCS)كالاتي:

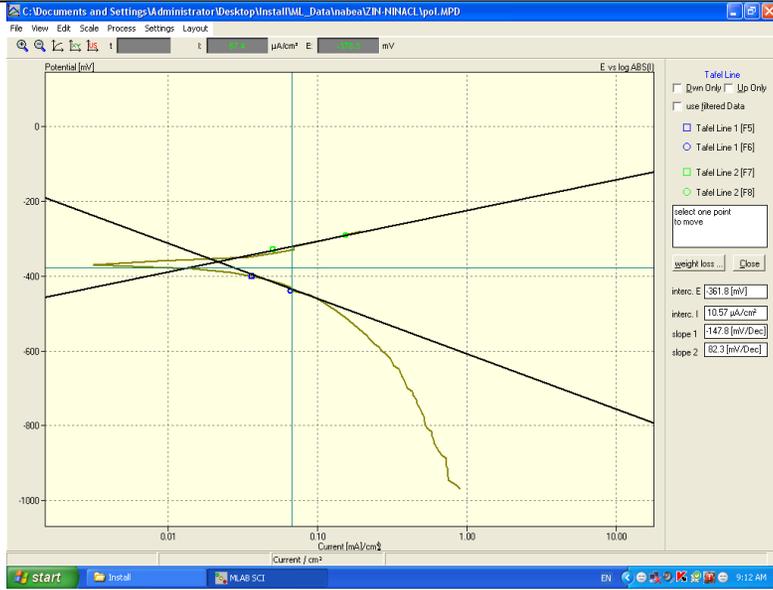
$$I_{corr} = 46.60 \mu A/cm^2 \quad , \quad E_{corr} = -700.3 mV$$



الشكل (12): منحنيات الاستقطاب لعينة MCS في محلول (3wt.% NaCl)

عند مقارنة جهد التآكل E_{corr} لكل من الفولاذ من دون طلاء و طلاء سبيكة (Ni-5P) يلاحظ أن مقاومة التآكل طلاء سبيكة (Ni-5P) أفضل مما هو عليه للفولاذ من دون طلاء وبنسبة (93.5%) .

أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء سبيكة (Ni-5P) كالتالي: $E_{corr} = -361.8\text{mV}$ ، $I_{corr} = 10.57\mu\text{A/cm}^2$



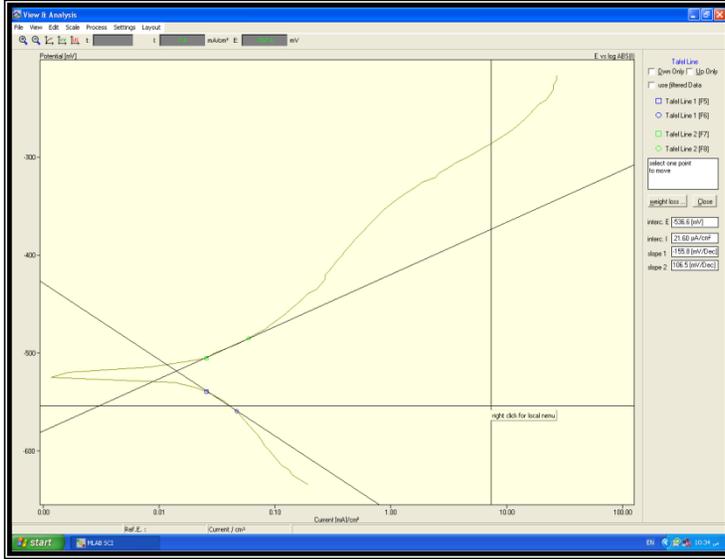
الشكل (13): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-5P) في محلول

(3wt.% NaCl)

يلاحظ من قراءة جهد التآكل لكل من المعدن الأساس والعينة (Ni-7P) أن طبقة
الطلاء قد حسنت مقاومة التآكل بنسبة (30%)، بينما كانت العينة (Ni-5P) أفضل
من العينة (Ni-7P) وبنسبة (48.3%).

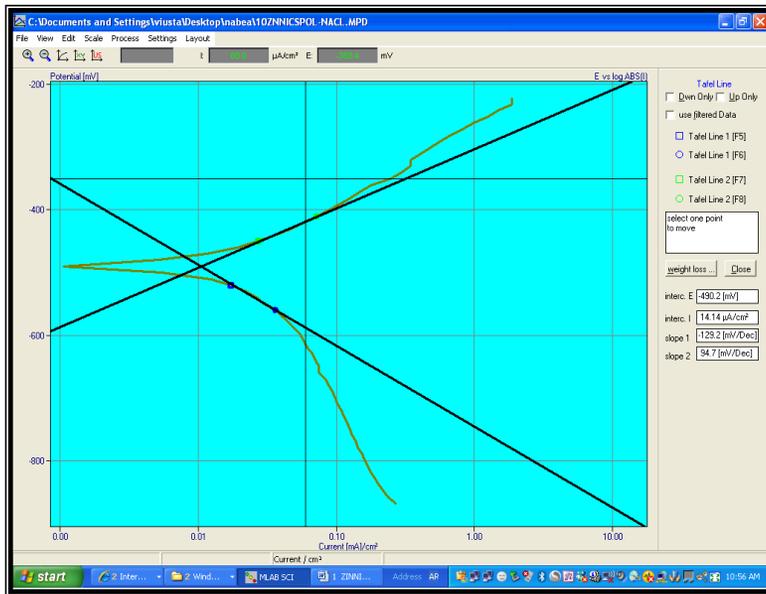
أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء

سبيكة (Ni-7P) كالاتي: $E_{corr} = -536.3 \text{ mV}$, $I_{corr} = 21.6 \mu\text{A/cm}^2$



الشكل (14): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-7P) في محلول (3wt.% NaCl)

أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء سبيكة (Ni-12P) كالآتي: $E_{corr} = -490.2\text{mV}$, $I_{corr} = 14.14\mu\text{A/cm}^2$



الشكل(15): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-12P) في محلول (3wt.% NaCl)

يلاحظ أن طبقة طلاء سبيكة (Ni-12P) تعطي مقاومة تآكل أفضل من طبقة طلاء سبيكة (Ni-7P) حيث كانت نسبة التحسن (9.4%). بينما كانت طبقة الطلاء للعينة (Ni-12P) تعطي مقاومة تآكل أقل من مقاومة التآكل (Ni-5P) وبنسبة (35.4%) ويستنتج مما سبق أن قيم التحسن في مقاومة التآكل تبعاً لنوعية الطلاء تأخذ التسلسل الآتي :

$$(Ni-5P) > (Ni-12P) > (Ni-7P) > MCS$$

ومما سبق نستنتج أن البنية المجهرية النانو بلورية لطلاء سبيكة (Ni-P) تظهر مقاومة تآكل أفضل من البنية غير المتبلورة وشبه البلورية وذلك في الوسط المائي العادي و الوسط الملحي (3wt.% NaCl) وذلك لأن البنية النانو بلورية تتميز بالكثافة العالية للحدود الحبيبية (grain boundaries) والتي ربما تسرع تشكيل أيونات الهيبوفوسفيت الممتازة على سطح الطلاء وتشكل طبقة حماية خاملة تمنع من التآكل المستمر لطبقة الطلاء.

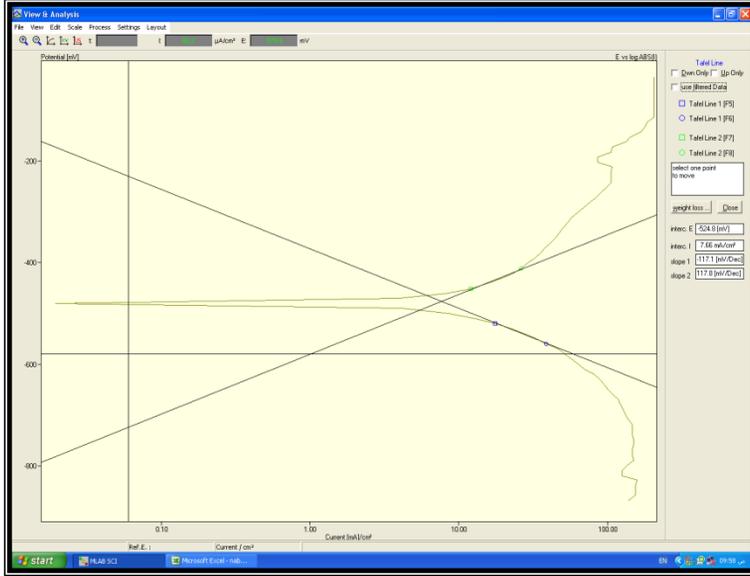
ثالثاً-المحلول الحمضي (3V.% HCl):

قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لـ (MCS) كالآتي:

$$I_{corr} = 7668 \mu A/cm^2 \quad , \quad E_{corr} = -524.8 mV$$

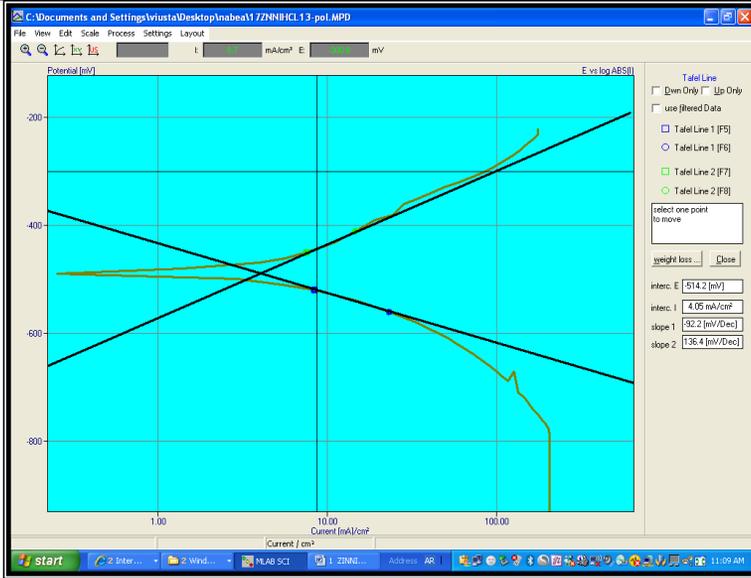
إن كثافة تيار التآكل المرتفعة في المحلول الحمضي تعزى إلى طبيعة الفولاذ متوسط الكربون ومحدودية مقاومته لحمض كلور الماء ، وهذا بسبب وجود ايونات الهيدروجين (H⁺) التي تستهلك الالكترونات وتعمل على تسريع معدل التفاعل

(corrosion rate) من خلال تحويلها الى ذرات والتي بدورها تتحد فيما بينها للتحويل الى فقاعات غازية تخرج خارج المحلول [12].



الشكل(16): منحنيات الاستقطاب لعينة MCS في محلول (3V.%HCl).

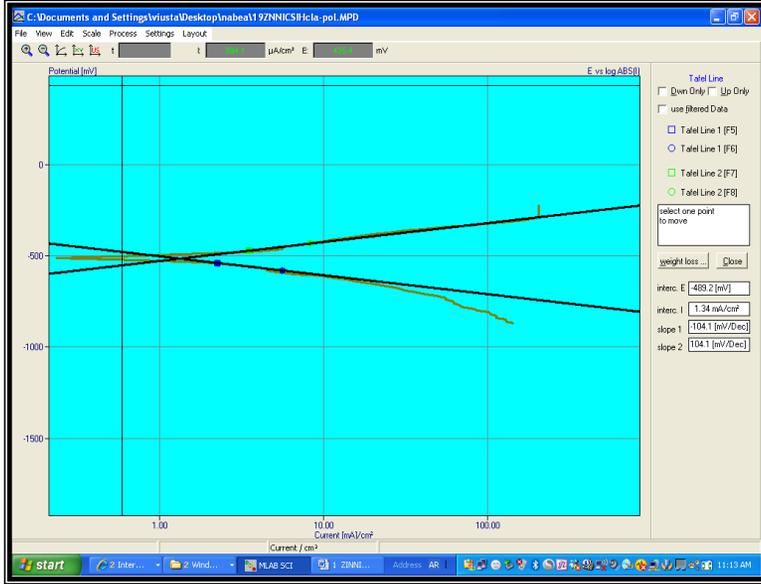
أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة نطاء سبيكة (Ni-5P) كالآتي: $E_{corr} = -514.2\text{mV}$, $I_{corr} = 40.50\mu\text{A/cm}^2$



الشكل (17): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-5P) في محلول (3V.% HCl) يلاحظ أن E_{corr} للفولاذ من دون طلاء و طلاء سبيكة (Ni-5P) متقاربتين وهذا يعني أن هذه الطبقة لا توفر الحماية من التآكل في المحاليل الحمضية (3% HCl).

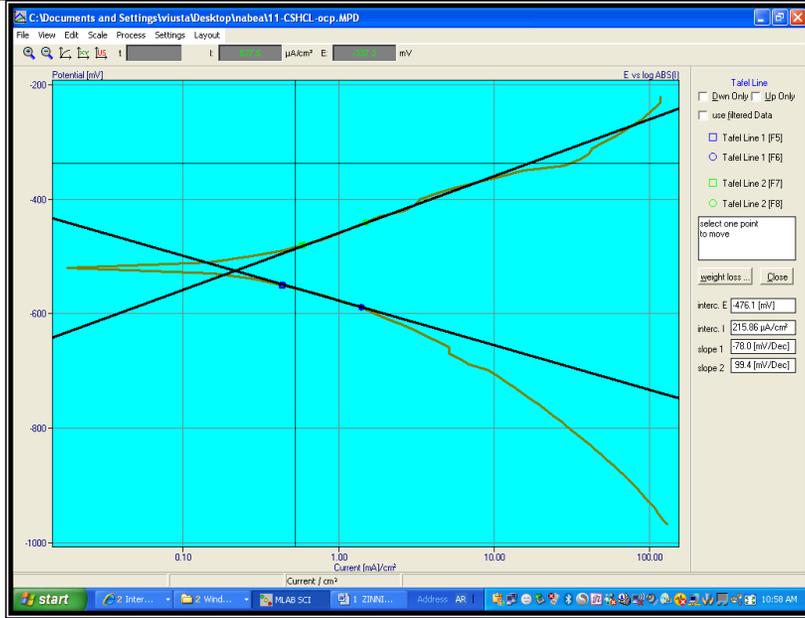
أن طلاء سبيكة (Ni-5P) الذي يتميز بالبنية النانو بلورية لم يظهر سلوك تخميل ملاحظ بسبب الانحلال النشط والشديد لطبقة الفوسفات المسامية وأيضاً بسبب الكثافة العالية للحدود الحبيبية في هذه البنية سوف تسرع من التآكل عن طريق تشكيل الكثير من الخلايا المجهرية الكهركيميائية بين الحدود الحبيبية و المعدن الأساس مما يؤدي إلى مقاومة تآكل ضعيفة في الوسط الحمضي. وهذه الفجوات تمثل مواقع فعالة لهجوم التآكل عندما يتعرض السطح لوسط أكال، لذلك تتناقص مقاومة تآكل طلاء (Ni-P) في الوسط الحمضي بتشكيل البنية المجهرية النانو بلورية.

أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء سبيكة (Ni-7P) كالاتي: $E_{corr} = -489.2\text{mV}$, $I_{corr} = 1340\mu\text{A/cm}^2$



الشكل (18): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-7P) في محلول (3V.% HCl) يلاحظ أن طبقة الطلاء (Ni-5P) لا تبدي سلوك تخميل ملاحظ نسبة للفولاذ غير المطلي ، بينما كانت طبقة الطلاء للعينة (Ni-7P) تعطي تحسناً في مقاومة التآكل نسبة إلى طبقة الطلاء للعينة (Ni-5P) وبنسبة (5.1%) .

أما قيم كثافة تيار التآكل وجهد التآكل المستحصل عليها من هذه الطريقة لطلاء سبيكة (Ni-12P) كالآتي: $E_{corr} = -476.1 \text{ mV}$ ، $I_{corr} = 215.86 \mu\text{A/cm}^2$



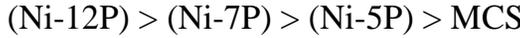
الشكل (19): منحنيات الاستقطاب لطلاء سبيكة (Ni-12P) في محلول (3V.% HCl)

يلاحظ أن ميول الفولاذ من دون طلاء للتآكل والفولاذ المطلي بالسبيكة (Ni-5P) تكاد تكون متقاربة حيث كان جهد التآكل لهما -514.2 mV و -524.8 mV على التوالي، وهذا يعني أن التحسن في مقاومة التآكل الذي تسببه طلاء سبيكة (Ni-5P) نسبة إلى الفولاذ من دون طلاء هو (2%).

بينما كانت نسبة التحسن في مقاومة التآكل الذي تسببه طبقة طلاء سبيكة (Ni-7P) إلى الفولاذ غير المطلي تعطي تحسناً في مقاومة التآكل نسبة إلى طبقة الطلاء ونسبة (7.2%). وأخيراً كانت نسبة التحسن في مقاومة التآكل الذي تسببه طبقة طلاء سبيكة (Ni-12P) إلى الفولاذ غير المطلي تعطي تحسناً في مقاومة التآكل نسبة إلى طبقة الطلاء ونسبة (10.2%) بسبب تجانس سطحها و انعدام الحدود الحبيبية التي تشكل عيوب وممرات لهجوم التآكل.

قد لاحظنا أن مقاومة تآكل طلاء سبيكة (Ni-P) في الوسط الحمضي أضعف بكثير من مقاومة التآكل في الأوساط المعتدلة وذلك لأن إغناء عنصر الفوسفور لسبيكة (Ni-P) أثناء الانحلال المميز للنيكل من السبيكة يسبب عيوب في سطح البنية المجهرية وهذا بدوره يسهل من انحلال وأكسدة ذرات الفوسفور السطحية وتحويلها من أيونات الهيبوفوسفيت إلى أيونات الفوسفات المنحلة بينما في الأوساط المعتدلة فإن إغناء عنصر الفوسفور للطبقة أثناء الانحلال المميز للنيكل يؤدي إلى تشكيل طبقة فوسفات النيكل $Ni_3(PO_4)_2$ التي تحد من سرعة التآكل^[15].

ومما سبق فإن قيم التحسن في مقاومة التآكل تبعاً لنوعية الطلاء تأخذ التسلسل الآتي:



5- الاستنتاجات :

1. يلعب تركيب حوض الطلاء وشروط الترسيب دوراً أساسياً في تحديد البنية المجهرية والتركيبي الكيميائي لطبقة طلاء سبيكة (Ni-P).
2. يمكن الحصول على بنية مجهرية نانو بلورية لطلاء سبيكة (Ni-P) باستخدام حوض ترسيب كهربائي يحوي تركيز منخفض من العامل المرجع (5 g/l) ومادة منقية للبلورات (سكارين) بتركيز (5 g/l) بالشروط الآتية: درجة

الحرارة = $(70 \pm 5)^\circ\text{C}$ ، كثافة التيار = 6 A/dm^2 ، $\text{pH} = 4-5$ ، تحريك
مغناطيسي = 400 rpm .

3. يتناقص الحجم الحبيبي لبلورات طبقة طلاء سبيكة (Ni-P) بزيادة محتوى
الفوسفور في هذه الطبقة والذي يرتبط بزيادة تركيز هيبوفوسفيت الصوديوم في
حوض الطلاء وتناقص كثافة تيار الطلاء.

4. تتحول البنية المجهرية لطبقة طلاء سبيكة (Ni-P) من البلورية إلى شبه البلورية
وأخيراً إلى البنية غير المتبلورة بزيادة محتوى الفوسفور في هذه الطبقة.

5. دلت نتائج الاختبارات أن البنية المجهرية النانو بلورية لطلاء سبيكة (Ni-P)
تبدي أفضل حماية للمعدن الأساس في ماء الصنبور والوسط الملحي
(3wt.% NaCl)، بينما في الوسط الحمضي لم تظهر هذه البنية أي سلوك تخميل
ملاحظ.

6. تشير قيم معدلات التآكل لطبقات طلاء سبيكة (Ni-P) في الوسط الحمضي
(3V.% HCl) إلى تأثر هذه السبيكة بشكل كبير وعدم حمايتها للمعدن الأساس
بالشكل المطلوب.

7. لم تحقق البنية المجهرية النانو بلورية لطلاء سبيكة (Ni-P) سلوك تخميل
ملاحظ في الوسط الحمضي (3V.% HCl) بعكس البنية غير المتبلورة التي
أعطت أداء أفضل في هذا الوسط بسبب انعدام الحدود الحبيبية التي تشكل عيوب
و ممرات لهجوم التآكل.

8. يلعب الفوسفور دوراً هاماً في مقاومة تآكل طلاء سبيكة (Ni-P) في الوسط
الحمضي (3V.% HCl) حيث تزداد مقاومة التآكل بزيادة نسبة الفوسفور في
السبيكة.

6- التوصيات:

1. إجراء معالجات حرارية لسبيكة الطلاء تحت أجواء خاملة أو أجواء مخلخلة
الضغط ودراسة تأثيرها على الخواص.

2. دراسة أداء هذه السبيكة عند درجات حرارة منخفضة.

3. إدخال مركبات وبأحجام أقطار مختلفة مثل Al_2O_3 أو SiC ودراسة تأثيرها على البنية، وعلى خصائص التشحيم الذاتي لطبقة الطلاء، وكذلك دراسة تأثيرها على معدل التآكل.
4. استخدام الايبوكسي المدعم بمادة هجينة مع هذه السبيكة ودراسة سلوك تآكلها.
5. استخدام تكنولوجيا (Nanoscale) في عمليات الطلاء الكهربائي لسبائك أخرى ودراسة تأثير وجود هذه المادة على خواص السبائك الناتجة.

7- المراجع :

1. Branko N-P, 2015- Thermodynamics in the Electrochemical Reactions of Corrosion. chapter 2 , Elsevier B.V., Corrosion Engineering, Amsterdam , pp.30-91.
2. Sathishkumar , P; Kumaravelan , V . and Priya , 2015- D.D.Comparative study of mild steel corrosion using hydrochloric acid and phosphoric acid medium with ocimum tenuiflorum (l) plant extract . International Journal of Advanced Research, 3(4) , 643 - 651.
3. W-Hsu, C. et al, 2005- "Electrochemical Corrosion Studies on Co-Cr-Mo implant alloy in biological solution ", Materials Chemistry and Physics 93, pp 531-538.
4. Abou krisha M._ M., 2011- Influence of Ni²⁺ concentration and deposition potential on the characterization of thin electrodeposited Zn-Ni-Co coating, Material Chemistry and Physics , Vol.125 , ELSEVIER, pp.621-627.
5. Aleksandra LELEVIC, 2018- Ni-P coatings electroplating, Artia Nanoengineering & Consulting, 9, pp.332-400
6. Y. Suzuki, S. Arai, I. Shohji, E. Kobayashic, 2009- Phosphorus Particle Composite Plating with Ni-P, Alloy

- Matrix, Journal of The Electrochemical Society, 156, 8, D283–D286.
7. Duncan, R.N. 1996–The metallurgical structure of electroless nickel deposits, Effect on coating properties. Plat. Surf.Finish, 8, 65–69.
 8. ASTM,2003 Handbook,“ Corrosion: Fundamentals, Testing and protective”, Vo.13A.
 9. Riedel, W.1991– Electroless nickel plating; Reprinted; ASM International: Metals Park, OH, USA.
 10. Afroukhteh, S., Dehghanian, C. & Emamy,2012– M. Preparation of electroless Ni–P composite coatings containing nano–scattered alumina in presence of polymeric surfactant. Prog. Nat. Sci. Mater. Int , 22, 318–325.
 11. D. Nava, C. E. Dávalos, A. Martínez–Hernández, F. Manríquez, Y. Meas, R. Ortega–Borges, J. J. Pérez–Bueno, G. Trejo.2013– Effects of heat treatment on the tribological and corrosion properties of electrodeposited Ni–P alloys, International Journal of Electrochemical Science 8, no. 2, pp. 2670–2681.

12. Knyazev, A. V. et al.2017- Magnetic properties of electrodeposited amorphous nickel-phosphorus alloys. Russ. J. Electrochem ,53(3), 270-274
13. Pierre R. Roberge,2012- "Hand book of Corrosion Engineering" ,Book :second edition , . Mc Graw-Hill Education.
14. He, Y., Wang, S. C., Walsh, F. C., Chiu, Y. L. and Reed, P. A. S.,2016- "Self-lubricating Ni-PMoS₂ composite coatings." Surface and Coatings Technology, 307 ,p926-934.
15. S. J. Splinter, R. Rofagha, N. S. McIntyre, U. Erb.1996- XPS characterization of the corrosion films formed on nanocrystalline Ni-P alloys in sulphuric acid, Surface and Interface Analysis 24, no. 3 , pp. 181-186.

الأهمية التطبيقية للرمال الكوارتزيتية في موقع الدعكانة شمال شرق منطقة القريتين

علي ظاهر ابراهيم* الدكتورة ندى سلمان** الدكتور سامر غدير***

ملخص

أجريت دراسة لمكونات الرمال الكوارتزيتية في ثلاثة مواقع ضمن منطقة الدعكانة شمال شرق القريتين بغية تحديد إمكانية استخدامها في التطبيقات العملية. استخدم كل من مطياف الأشعة تحت الحمراء متوسط المدى FTIR والمجهر المكبر وجهاز التحليل الحبي وجهاز الأشعة السينية المفلورة XRF لهذا الغرض. تم من خلال البحث تحديد التركيب الفلزي وشكل الحبات ودرجة الفرز للرمال والمحتوى الكيميائي من الأكاسيد الرئيسية. أظهرت النتائج أن عينات الرمال في جميع المواقع تتمتع بخواص فيزيائية جيدة انما تميزت العينات المنتشرة في الموقعين A و B بخواص جيدة للصناعة نظراً لارتفاع نسبة SiO_2 وانخفاض نسبة الشوائب فيها، بينما كانت عينات الموقع C ذات محتوى أقل من SiO_2 ونسبة شوائب مرتفعة مما يجعلها تحتاج لعمليات معالجة خاصة.

الكلمات المفتاحية: رمال، الدعكانة، كوارتز، صناعات.

* طالب دكتوراه - قسم الجيولوجيا - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سوريا.

** أستاذ مساعد في قسم الجيولوجيا بكلية العلوم في جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

*** أستاذ مساعد في المعهد العالي للبحوث البحرية في جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

The applied importance of quartz sand in the Dukanah site, northeast of Al-Qaryatayn area

* Ali Taher Ibrahim **Dr Nada Salman ***Dr. Samer Ghadeer

Abstract

A study of the quartz sand components was conducted in three locations within the Dukanah area, northeast of Al-Qaryatayn, in order to determine the possibility of using them in practical applications. A FTIR, a magnifying microscope, a grain analyzer, and an XRF were used for this purpose. Through the research, the mineralogical component, the shape of the grains, the degree of sorting for the sand, and the chemical content of the main oxides were determined. The results showed that the sand samples in all the sites had good physical properties, but the samples scattered in sites A and B showed high quality for industry due to the high percentage of SiO₂ and low percentage of impurities in it, while the samples from site C had less SiO₂ content and higher percentage of impurities, which makes them need treatment processes especially.

Keywords: Sands, Dukanah, quartz, industries.

* Postgraduate student - PhD - Department of Geology, Faculty of Science, Tishreen University - Syria.

**Assistant Professor in the Department of Geology, Faculty of Science, Tishreen University - Syria.

***Assistant Professor at the Higher Institute for Marine Research at Tishreen University - Syria.

1-مقدمة:

تعتبر الرمال الكوارتزية مواد أولية لصناعات هامة عديدة، حيث تستخدم بحسب درجة نقاوتها في الصناعات النانوية كالخلايا والكابلات الضوئية وصناعة الألياف الزجاجية والعدسات الطبية والزجاج والكريستال عالي الجودة، فضلاً عن مواد البناء كصناعة الاسمنت، البلاط والسيراميك. [1]

كثُر مؤخراً الإهتمام العالمي بالبحث عن مصادر رمال كوارتزية تتمتع بدرجة نقاوة عالية وخواص فيزيائية جيدة بغرض استثمارها في المجالات الصناعية.

2-أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث من إمكانية تأمين الخام الأولي للعديد من الصناعات المتطورة وخاصة مع الانتشار الواسع للرمال الكوارتزية ضمن منطقة الدراسة وبسماكات كبيرة إضافة لسهولة الاستثمار مما يجعلها إحدى الخامات الهامة والاقتصادية.

يهدف البحث إلى:

1-وضع تصنيف للرمال الكوارتزية في منطقة الدراسة على أساس دراسة فلزية وكيميائية وفيزيائية.

2-تحديد جودتها التطبيقية بغية وضعها على خارطة المواصفات العالمية للمواد الأولية المستخدمة في الصناعات المتطورة.

3- التطبيقات العملية:

تتطلب الصناعات القائمة على الرمال الكوارتزية شروطاً فيزيائية وكيميائية خاصة يتم تحديدها من خلال الدراسة المجهرية والكيميائية الدقيقة وبناءً على هذه الشروط يتم تصنيف الرمال الصالحة للاستخدام الصناعي في عدة مجالات بالإعتماد على المعايير العالمية [2] [3] [4]، الجدول (1).

جدول رقم 1: يظهر شروط صلاحية الرمال للصناعة.

نسبة CaO+MgO	محتوى Al ₂ O ₃	محتوى Fe ₂ O ₃	محتوى SiO ₂	الفرز	شكل الحبات	الاستعمالات
0.1	0.2	0.020	99.7	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	الزجاج البصري
0.5	4.0	0.035	95.0	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	البورسلان
0.2	0.5	0.035	98.5	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	أوعية زجاجية وأدوات الطعام
0.5	4.0	0.060	95.0	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	ألواح زجاجية
0.5	0.5	0.300	98.0	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	زجاج نوافذ ملون
0.5	4.0	0.300	95.0	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	زجاج ملون
-	3.0	0.3	94.5	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	ألياف زجاجية
0.5	0.35	0.25	99.0	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	كربيد السيلكون
0.5	0.35	0.25	99.3	معتدل جيد	مدورة أو زاوية	سيليكات الصوديوم
0.2	1.0	0.8	95.0	معتدل إلى جيد	مدورة أو زاوية	صب القوالب

4- مواد وطرائق البحث:

قسمت آليات العمل إلى مرحلتين العمل الحقلية والعمل المخبري. تم على صعيد العمل الحقلية إجراء جولات حقلية استطلاعية وتفصيلية لمنطقة الدراسة، وجمع وتوثيق العينات اللازمة للدراسة من المواقع المدروسة، وذلك حسب الحاجة والضرورة العلمية وبلغ عددها 48 عينة.

تم، على صعيد العمل المخبري، استخدام مطياف الأشعة تحت الحمراء FTIR (Infrared spectroscopy) من نوع 410Jasco (كلية العلوم-جامعة البعث) في المجال $400-4000\text{cm}^{-1}$ لأجل تحديد هوية المادة المكونة للرمال المدروسة. [5].

استخدم المجهر المكبر من نوع MOTIC (المعهد العالي للبحوث البحرية-جامعة تشرين) للدراسة المجهرية لتسع عينات رملية وتحديد شكل الحبات فيها.

استخدم جهاز التحليل الحبي بسلسلة مناخل نظامية، لدراسة توزيع الحبات في ثلاثين عينة ممثلة للمواقع الثلاثة واستخدم برنامج GSSTAT (Grain Size Statistics Program) لمعرفة درجة فرزها من خلال حساب قيم معامل الإنحراف المعياري [6] [7].

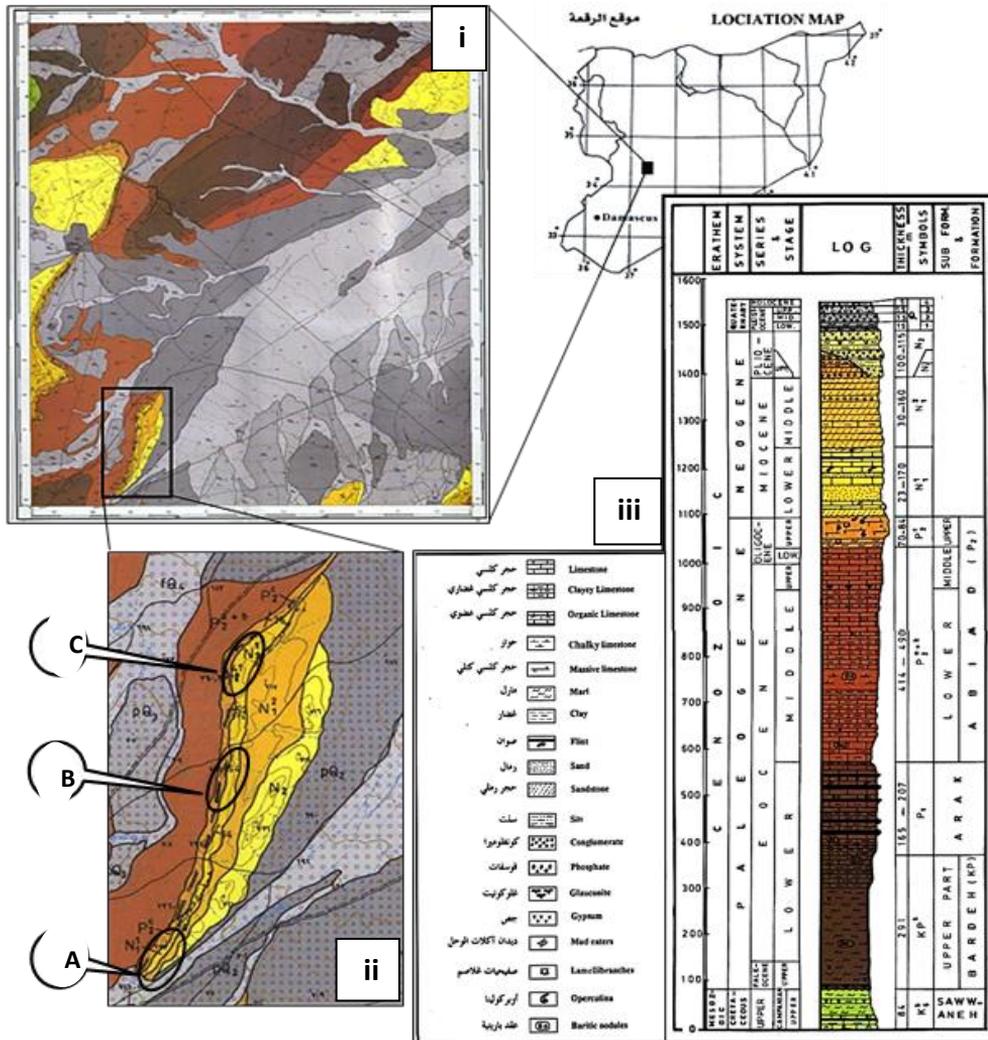
كما أجري تحليل كيميائي كمي لنسب العناصر (الأكاسيد) الداخلة في تركيب 6 عينات بواسطة جهاز التحليل بالأشعة المفلورة (X-RAY Fluorescence) بغية تحديد التركيب الدقيق، الأمر الذي يحدد المواصفات التطبيقية لها.

5-منطقة الدراسة

تمتد منطقة الدراسة شمال شرق بلدة القريتين وفق الإحداثيات الآتية:

E: 37°, 17', 00" – 37°, 20', 00"

N: 34°, 15', 00" – 34°, 18', 06"



الشكل رقم (1): الخارطة الجيولوجية لرقعة الجبات ذات المقياس 50000/1 [8]، وموقعها على الخارطة الجيولوجية السورية (i)، ومنطقة الدراسة (الدكانة) (ii)، والعمود الطبقي لها (iii).

الإطار الجيولوجي: تظهر الرمال على شكل عدسة في الطرف الشمالي الغربي للسلسلة ضمن تلال طولانية تأخذ اتجاه شمال شرق قليلاً - جنوب غرب بشكل مواز لاتجاه الطي العام. [8] الشكل (1) حيث تشكل منطقة الدراسة جزء من الأجنحة الشمالية الغربية للسلسلة التدمرية الجنوبية.

يمتد عمر التوضعات الرسوبية المتكشفة ضمن الخارطة الجيولوجية للرقعة من الكامبانيان الأسفل وحتى الأليغوسين الأعلى، إضافة لتوضعات قارية نيوجينية ورباعية ويبين العمود الليتولوجي التابع الطبقي من الأقدم إلى الأحدث. [8]

6- النتائج والمناقشة:

6-1 المواقع المدروسة حقلياً للتوضعات الرملية في منطقة الدراسة:

• الموقع الأول (A).

عبارة عن تشكيلة رملية سائبة متكشفة تمتد لحوالي 1500م تقريباً باتجاه شمال جنوب بسماكة حوالي 15م الشكل(2). يعلو التشكيلة حجر رملي متصلب بسماكة 20م، لوحظ بأن الرمال تأخذ تدرج لوني من الأبيض إلى الأبيض المصفر وحتى الأصفر، يعلو الموقع طبقة من التربة مع كونغوميرا مختلفة الحجم بسماكة وسطية حوالي 1.5م، ويقع الموقع عند الإحداثيات:

N: 34° 17' 38.7''

E: 36° 18' 52.5''



الشكل رقم (2): صورة فوتوغرافية تمثل توضعات تكشف الموقع الأول A
• الموقع الثاني (B).

عبارة عن تشكيلة رملية سائبة متكشفة تمتد مسافة حوالي 1000م. لوحظ سماكة كبيرة للرمال تتجاوز 50م تعلوها طبقة من التربة الزراعية بسماكة وسطية حوالي 1.5م. تبدو الرمال بيضاء اللون الشكل (3). يقع الموقع عند الإحداثيات:

N: 34° 16' 01.1''

E: 37° 16' 54.3''



الشكل رقم (3): صورة فوتوغرافية تمثل توضعات تكشف الموقع الثاني B

• الموقع الثالث (C).

عبارة عن تشكيلة رملية سائبة متكشفة بلون أبيض مصفر يتحول إلى الأصفر في بعض المناطق وبسماكة حوالي 15م، تعلوها طبقة من تربة وكونغلوميرا تتراوح سماكتها بين 1-4م الشكل (4). يقع الموقع عند الإحداثيات:

N: 34° 18' 10.9''

E: 37° 19' 19.5''

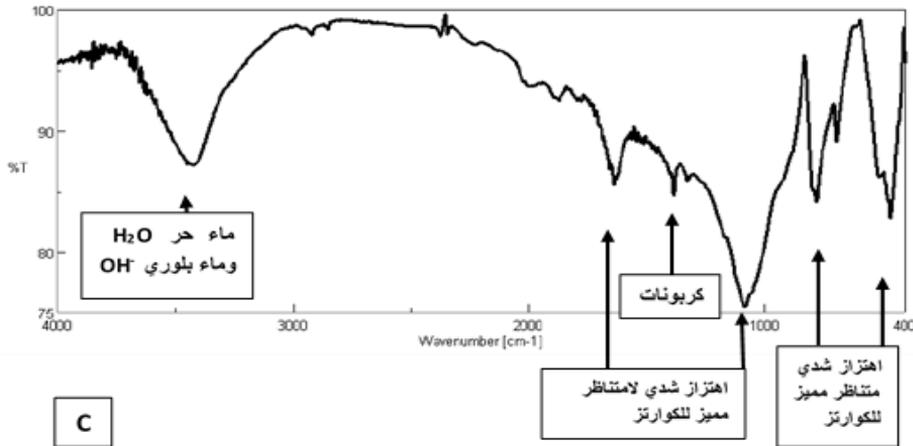
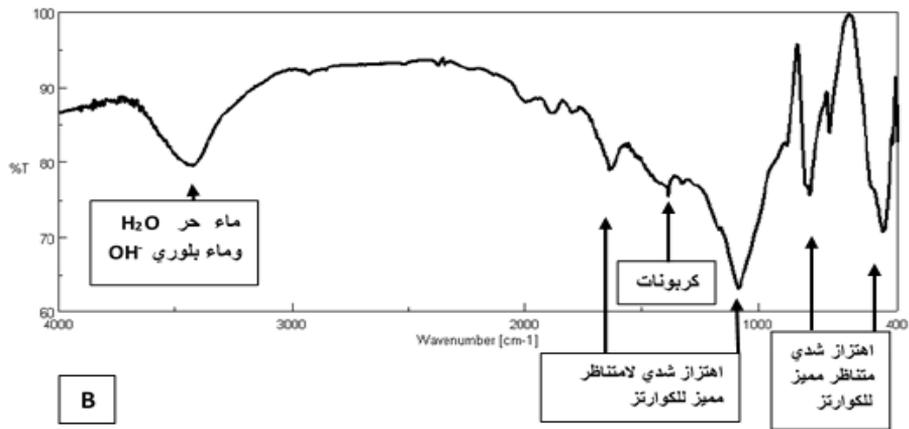
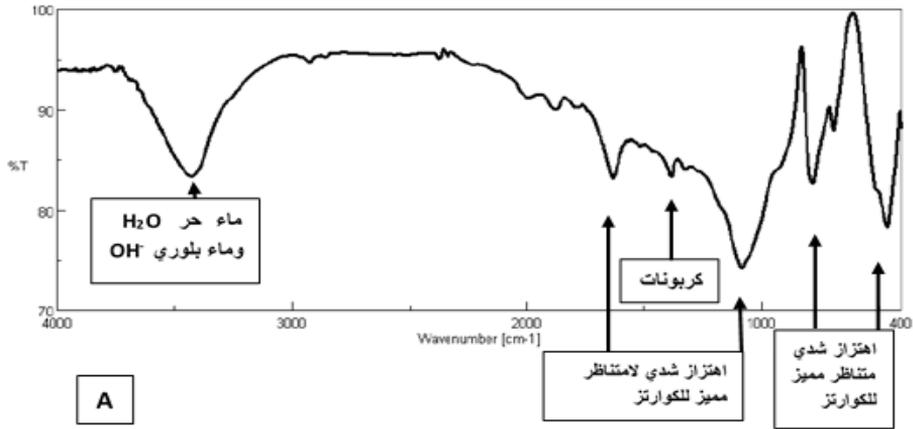


الشكل رقم (4): صورة فوتوغرافية تمثل توضعات تكشف الموقع الثالث C

2-6 نتائج الدراسة المخبرية:

1-2-6 أطياف الأشعة تحت الحمراء قريب إلى متوسط المدى ($200-1300\text{cm}^{-1}$) FTIR تبدي أطياف امتصاص الأشعة تحت الحمراء نفس الذرى عند مجالات طاقة محددة للعينات الثلاث المقاسة ويعكس سمات بنيوية دقيقة للسيليكا المبلورة على شكل فلز الكوارتز (SiO_2) (الشكل 5)، ويوضح ذلك من خلال نوع الاهتزاز للروابط الذرية للجزيئات

المؤلفة للبنية البلورية للكوارتز بمختلف أشكاله، حيث يظهر التركيب الكوارتزي النقي للرمال.



الشكل رقم (5): أطياف FTIR لثلاث عينات رملية مأخوذة من المواقع الثلاثة، تظهر تماثل في قيم الامتصاص ما يعكس تماثل في المادة المكوّنة لهذه الرمال (الكوارتز).

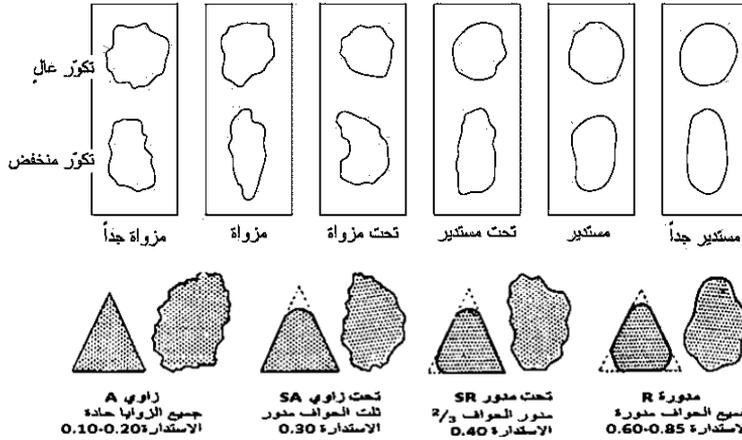
يميز الكوارتز ارتباط ثنائي أكسيد السيليكون اللامائي على شكل رباعيات وجوه لأربع روابط من Si-O، وهذه تنعكس بدورها في نموذج اهتزاز شدي لا متناظر عند الذروة 1082 cm^{-1} .

كذلك تنعكس روابط Si-O-Si ضمن بنية الكوارتز وفق نموذج اهتزاز شدي متناظر عند كل من الذروتين 779 cm^{-1} و 691 cm^{-1} ، بينما تنعكس رباعيات الوجوه السيليكاتية في بنية الكوارتز عند الذروة 460 cm^{-1} وفق نموذج اهتزاز انحنائي.

6-2-2 الدراسة المجهرية:

تم تحديد شكل الحبات من خلال وصف التكور والاستدارة، حيث يتم تحديد قياس كروية الحبيبات بأن تكون قريبة من الكروية أو ذات تكور منخفض، والتدورة التي تشير إلى نعومة الحواف بصرف النظر عن شكلها فيمكن أن تكون مدورة أو تحت زاوية أو زاوية؛

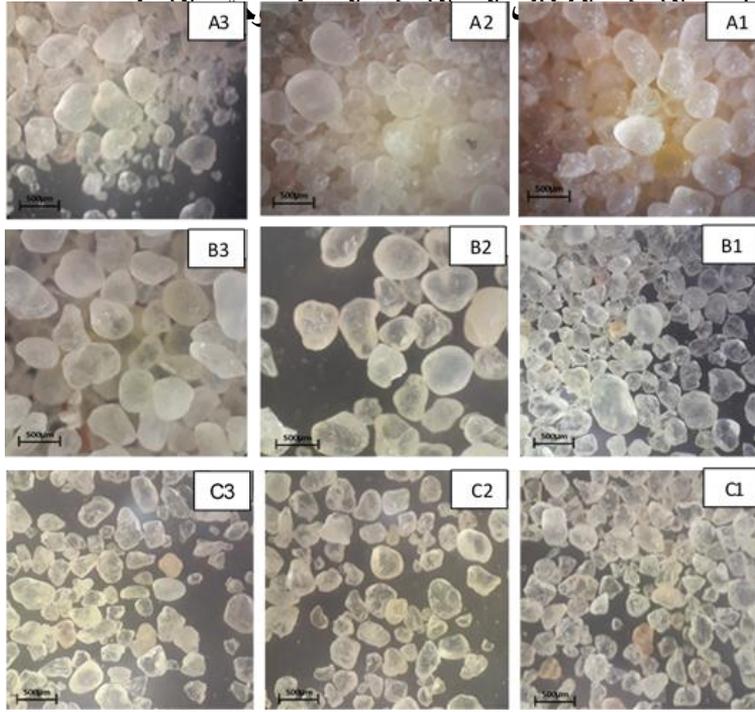
الشكل (6). [9].



الشكل رقم (6): تصنيف الحبيبات حسب نسبة الاستدارة ونعومة الحواف [9].

من خلال هذه المعايير تم وضع دراسة وصفية للعينات الموضحة بالشكل (7) والذي يبين الصور المجهرية للعينات وتلخيص وصف كل عينة في الجدول (2). تبين من خلال

الدراسة المجهرية تمتع عينات مواقع البحث بتكور عالٍ نسبياً وتدورة جيدة بدرجة استدارة يتدرج لونها



الشكل رقم (7): صور مجهرية لعينات المواقع الثلاثة.

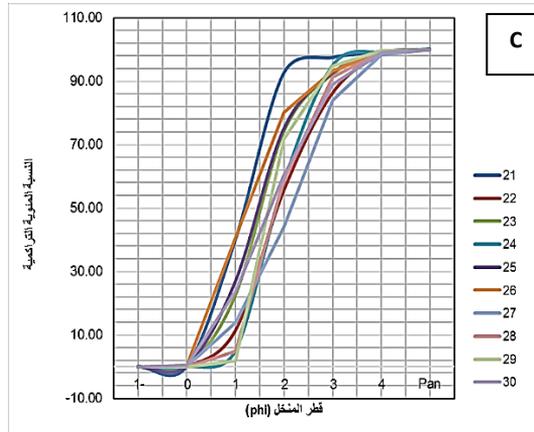
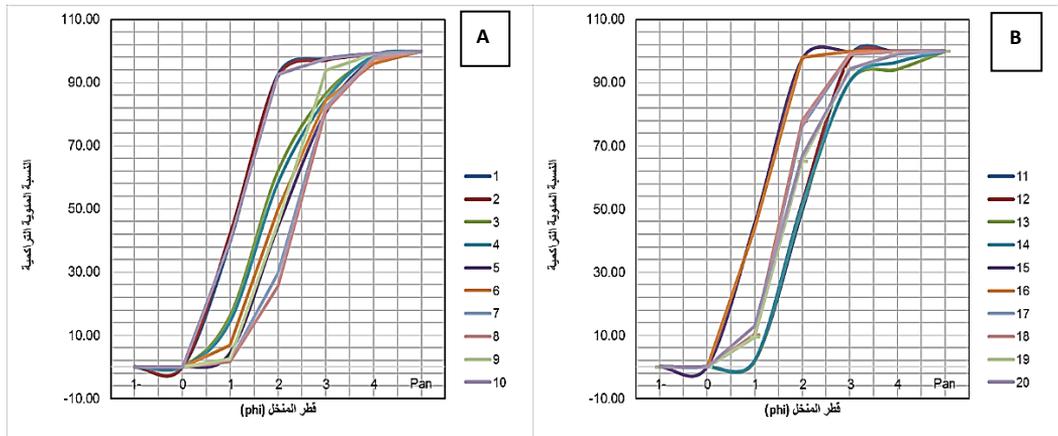
جدول رقم 2: وصف عينات المواقع الثلاثة.

الموقع الحقلي	رقم العينة	قوة التكبير	التركيب	اللون	حجم الحبات	التكور	التدورة
الموقع الأول A	A1	X40	كوارتز	أصفر	متوسط	تكور عالٍ	مدورة R
	A2	X40	كوارتز	أبيض مصفر	متوسط	تكور عالٍ	مدورة R
	A3	X40	كوارتز	أبيض مصفر	متوسط	تكور عالٍ	مدورة R
الموقع الثاني B	B1	X40	كوارتز	أبيض	ناعم	تكور عالٍ	مدورة R
	B2	X40	كوارتز	أبيض مصفر	متوسط	تكور عالٍ	مدورة R
	B3	X40	كوارتز	أبيض مصفر	متوسط	تكور عالٍ	مدورة R
	C1	X40	كوارتز	أبيض مصفر	ناعم	تكور عالٍ	مدورة R

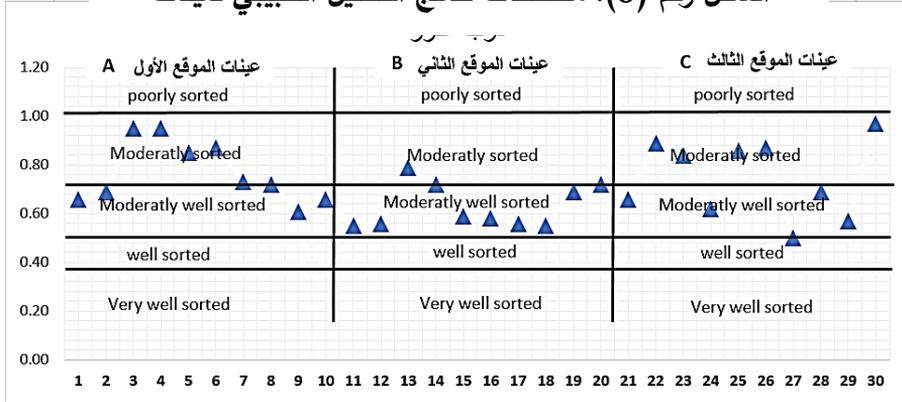
الموقع الثالث	C2	X40	كوارتز	أبيض مصفر	ناعم	تكور عالٍ	مدورة R
C	C3	X40	كوارتز	أبيض مصفر	ناعم	تكور عالٍ	مدورة R

3-2-6 التحليل الحبي:

استخدم لرسم المنحنيات التراكمية كل من القيم التراكمية في المحور الرأسي وحجم الحبيبات حسب مقياس فاي (ϕ) في المحور الأفقي، ومن خلال دراسة هذه المنحنيات في مخططات نتائج التحليل الحبيبي لعينات المواقع الثلاثة الشكل (8)، تبين وجود تشابه واضح في اتجاه العينات، حيث لوحظ سيطرة حجوم الحبات المتوسطة والناعمة في معظم المخططات، ومن خلال حساب معامل الإنحراف المعياري الشامل للعينات تبين سيطرة فرز معتدل إلى معتدل جيد على حبات العينات الرملية المدروسة؛ الشكل (9).



الشكل رقم (8): مخططات نتائج التحليل الحبيبي لعينات



الشكل رقم (9): مخطط الفرز لعينات المواقع الثلاثة.

4-2-6 دراسة المحتوى الكيميائي:

تم إجراء تحليلين لعينتين من كل موقع بعد أن تمت معالجتها بشكل جزئي عن طريق الغسل بالماء وحمض كلور الماء وتجفيفها، وقد تم أخذ القيم الوسطية لها؛ (الجدول 3).

نلاحظ النسبة المسيطرة لأكسيد السيليسيوم (SiO_2) في جميع العينات وهو ما يؤكد نتائج دراسة أطياف الأشعة تحت الحمراء والمجهرية بأن العينات الرملية مكونة بالمجمل من حبات كوارتز حيث لوحظ أنها متلوثة في بعض منها مما يعكس ذلك ارتفاع نسبة أكسيد الحديد والألمنيوم.

جدول رقم 3: يظهر نتائج التحاليل الكيميائية للعينات المأخوذة.

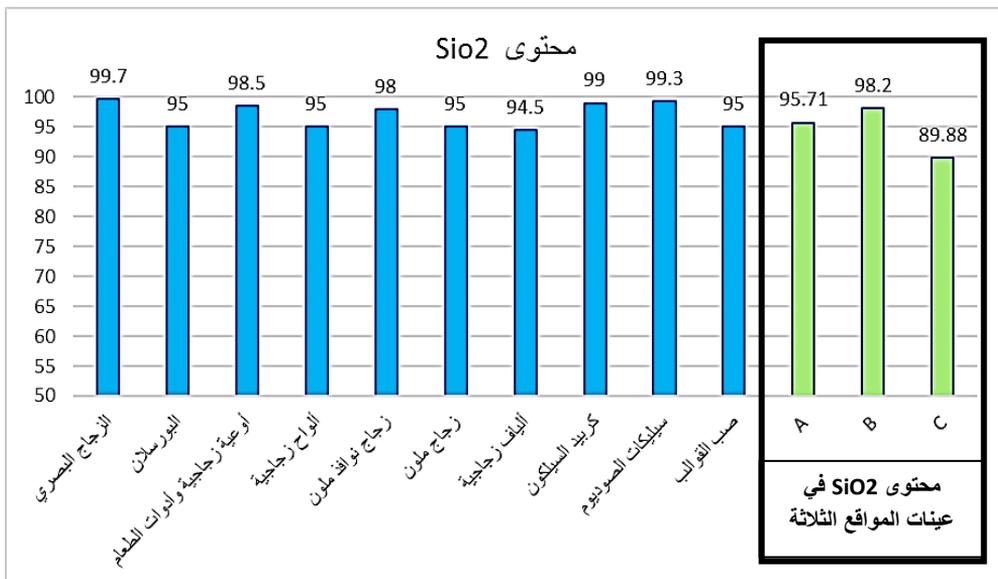
المواقع	SiO_2	Fe_2O_3	Al_2O_3	CaO	MgO	L.O.I
---------	----------------	-------------------------	-------------------------	-----	-----	-------

1.97	0.18	1.57	0.43	0.12	95.71	A
0.99	0.10	0.17	0.45	0.09	98.20	B
6.58	0.19	2.17	0.76	0.40	89.88	C

6-2-5 المقارنة مع شروط التطبيقات العملية:

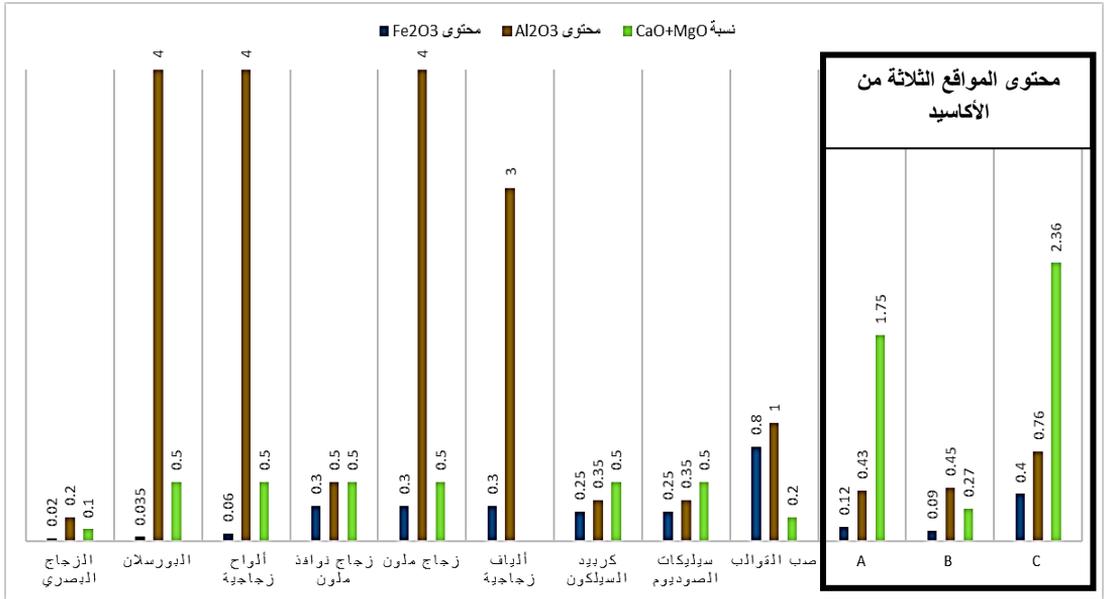
من خلال مقارنة الخواص الفيزيائية المطلوبة للصناعات الواردة في الجدول (1)، تبين أن عينات البحث تتمتع بدرجة فرز وشكل حبات تجعلها مناسبة لهذه الصناعات في حال تحقيقها للشروط الكيميائية.

أجريت مقارنة لمحتوى عينات مواقع البحث من أكسيد السيليسيوم SiO_2 مع القيم المرجعية المطلوبة للصناعات، والذي يعتبر العامل الرئيس المطلوب لتحديد قابلية الاستخدام [4] [10]. يلاحظ أن رمال الموقع A تحوي نسبة (SiO_2 95.71%) الشكل (10)، ونسبة قليلة من (Fe_2O_3 0.12%) و (Al_2O_3 0.43%) الشكل (11)، وهو ما يجعلها مؤهلة لدخول مجال صناعة الألياف الزجاجية ولكنها ذات محتوى مرتفع نسبياً من ($Cao+Mgo$ 1.75%) والتي تعتبر مؤثرة سلباً في عمليات الصناعة [11]، ففي حال تم معالجتها وتخفيض هذا المحتوى فإنه يمكن استخدامها في صب القوالب والزجاج الملون والألواح والبورسلان.



الشكل رقم (10): مخطط يبين مقارنة نسبة SiO_2 في عينات البحث مع القيم المرجعية. [10]

تمتعت عينات الموقع B بمحتوى 98.2% من SiO_2 الشكل (10) ونسبة قليلة من Fe_2O_3 (0.09%) و Al_2O_3 (0.45%) و $\text{CaO}+\text{MgO}$ (0.27%) الشكل (11)، مما يجعلها مؤهلة في وضعها الحالي لدخول مجال صناعات صب القوالب والألياف الزجاجية والزجاج الملون والنوافذ والأوعية والألواح وقريبة من القيم المطلوبة للبورسلان الزجاجي حيث تتطلب غسل ومعالجة لتخفيض نسبة Fe_2O_3 ، وفي حال تمت معالجتها فسوف ترتفع نسبة SiO_2 وبالتالي يمكن أن تدخل مجال صناعة سيليكات الصوديوم وكربيد السيلكون والزجاج البصري.



الشكل رقم (11): مخطط يبين مقارنة نسبة الأكاسيد ($\text{Fe}_2\text{O}_3-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{MgO}-\text{CaO}$) في عينات البحث مع القيم المرجعية للصناعات. [11]

أما بالنسبة لعينات الموقع C فإنها تمتعت بمحتوى منخفض من ($\text{SiO}_2=89.88\%$) نسبةً للقيم المرجعية المطلوبة، الشكل (10) ونسبة مرتفعة من ($\text{Fe}_2\text{O}_3=0.4\%$) و($\text{Al}_2\text{O}_3=0.76\%$) و($\text{CaO}+\text{MgO}=2.36\%$) الشكل (11)، وهو ما يجعلها غير مؤهلة لدخولها مجال الصناعات إلا بعد عمليات غسل ومعالجة خاصة لرفع نسبة SiO_2 وتخفيض نسب الأكاسيد الأخرى.

الاستنتاجات والتوصيات:

خلص هذا البحث إلى النتائج الآتية:

- تعتبر الرمال في مواقع البحث رمال كوارتزية نقية مؤلفة بالمجمل من حبات ناعمة إلى متوسطة من الكوارتز ذات فرز معتدل إلى معتدل جيد.
- تعد الرمال المنتشرة في الموقعين A و B ضمن منطقة الدراسة هامة جداً للاستثمار الصناعي في عدة مجالات وذلك لتمتعها بخواص فيزيائية وكيميائية جيدة إضافة إلى طبيعة انتشارها الواسع وسماكات توضعاتها الكبيرة الأمر الذي ينعكس إيجاباً على عملية الاستثمار وهذا ما يجعلها مكامن طبيعية اقتصادية.
- تحتاج رمال الموقع C إلى عمليات غسل ومعالجة مكثفة لزيادة نقاوتها وتخفيض نسبة الشوائب.

يوصي البحث بدراسة إمكانية وضع خطط لمعالجة هذه الرمال بشكل أكبر وفق طرق علمية ترفع من نسبة أكسيد السيليسيوم وتخفيض نسبة الشوائب من الأكاسيد المؤثرة سلباً عليها.

المراجع:

- [1] Langer, W. H. (2003). A general overview of the technology of in-stream mining of sand and gravel resources, associated potential environmental impacts, and methods to control potential impacts. In U.S. Geological Survey Open File Report OF-02-153 (version 1.0).
- [2] B.G.S. 2007. Silica Sand : Geology and Mineral Planning Fact Sheets for Scotland, pp. 11-25
- [3] Carr, D. D. (1971). Specialty sand resources of Indiana (Bulletin 42-F). Bloomington, IN: Department of Natural Resources Geological Survey.
- [4] S. Platiasa, K. Vatalisa, G. Charalampidesa, 2014, Suitability of quartz sands for different industrial applications.
- [5]. Flanigen, E.M.; Khatami, H., Infrared Structural Studies of Zeolite Framework, Cambridge Springs, 1971, 16403.
- [6]. BAIYEGUNHI, C; LIU, K; GWAVAVA, O. Grain size statistics and depositional pattern of the Ecca Group sandstones, Karoo Super group in the Eastern Cape Province, South Africa. De gruyter open. Vol. 9, 2017, 554- 576.
- [7]. GHADEER, S. G. Textural characteristics and distribution of costal sediments in the northern section of the Syrian continental shelf. Tishreen university journal for research and scientific studies. Vol. 39, No. 2, 2017.

[8] حسن، تركماني، رقعة الجبات، 1/50000، مع مذكرتها الإيضاحية، المؤسسة العامة للجيولوجيا والثروة المعدنية، 1995.

[9] FOLK, R; WARD, W. Brazos river bar: a study in the significance of grain size parameters. Journal of sedimentary petrology. Vol. 27, No. 1, 1957, 3-26.

[10] BS2975:1988 Methods of sampling and analysis of glass-making sands.

[11] Heinrich, E. W. (1981). Geologic types of glass-sand deposits and some North American representatives. Geological Society of America Bulletin 92 (9), 611-613.

References in Arabic:

[8] HASAN, TOURKMANY, JIBBAT SHEET, 1/50000, General Est Of Geology And Mineral Resources, 1995.

